LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN
I LMA200/MAL400 GEOMETRI OCH LINJÄR ALGEBRA 2003-10-28

1. **Bestäm matrisen för speglingen av planet $\mathbb{R}^2$ i linjen $3x - y = 0$.**

Linjen har en normalvektor $(3, -1)$ (dvs en vektor som är vinkelrät mot linjen). Låt (a, b) beteckna en godtycklig punkt i planet. Linjen som går genom denna punkt parallellt med vektorn $(3, -1)$ har ekvationen $(x, y) = (a, b) + t(3, -1), t \in \mathbb{R}$. Denna linje skär linjen $3x - y = 0$ i punkten $(x, y) = (a + 3t, b - t)$, där $3(a+3t) - (b-t) = 0$ dvs $t = \frac{1}{10}(b - 3a)$. Vi betecknar detta värde på t med t_0. Speglingen av (a, b) i linjen $3x - y = 0$ är den punkt (a', b') som ligger på linjen $(x, y) = (a, b) + t(3, -1), t \in \mathbb{R}$ och svarar mot $2t_0$ dvs det är punkten

$$(a', b') = (a, b) + 2t_0(3. - 1) = (a, b) + \frac{2}{10}(b - 3a)(3, -1) = (-\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b, \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b).$$

Alltså är matrisen för speglingen av planet i linjen $3x - y = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

2. **Lös för alla värden på parametern a ekvationssystemet:**

$$\begin{array}{rrrl} 2ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & = 1 \\ (3a+1)x_1 & +(a+1)x_2 & +2ax_3 & = 1 \\ 2ax_1 & +ax_2 & +x_3 & = 1 \end{array}$$

Determinanten av systemets matris är

$$D = \begin{vmatrix} 2a & a & a \\ 3a+1 & a+1 & 2a \\ 2a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ a+1 & 1 & 2a-1 \\ 2a & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)[a(a+1) - 2a] = a(a-1)^2.$$

Vi har $D = 0$ då och endast då $a = 1$ eller $a = 1$. Om $D \neq 0$ har systemet en enda lösning som ges av Cramers regel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a+1 & 2a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-(a-1)}{a(a-1)^2} = -\frac{1}{a(a-1)}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 1 & a \\ 3a+1 & 1 & 2a \\ 2a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{(a-1)(a+1)}{a(a-1)^2} = \frac{a+1}{a(a-1)},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2a & a & 1 \\ 3a+1 & a+1 & 1 \\ 2a & a & 1 \end{vmatrix}}{D} = 0.$$

Om nu $a = 0$ ger den första ekvationen $0 = 1$ så att systemet saknar lösningar. Om $a = 1$ är den första ekvationen $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$ och den andra $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$. Om man multiplicerar den första ekvationen med 2 och jämför högerleden så får man $2 = 1$, vilket innebär att systemet saknar lösningar även i detta fall. (Detta är en konsekvens av ett tryckfel: högerledet i den andra ekvationen skulle vara 2 i stället för 1 för att göra uppgiften lite roligare).

3. **Lös matrisekvationen $AXB + 2AX = C$, där**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Först konstaterar vi att matrisen A har invers A^{-1} ty $\det A = -1$ (använd t ex ”Sarrus regel”). Nu multiplicerar vi bägge leden i ekvationen med matrisen A^{-1} från vänster. Vi får $XB + 2X = A^{-1}C$ så att $X(B + 2I) = A^{-1}C$. Matrisen

$$B + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

har också invers ty $\det(B + 2I) = 4$. Efter multiplikation av ekvationen med $(B + 2I)^{-1}$ från höger, får vi slutligen $X = A^{-1}C(B + 2I)^{-1}$.

Det återstår att beräkna inverserna A^{-1} och $(B + 2I)^{-1}$. Resultatet är

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } (B + 2I)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

så att

$$X = A^{-1}C(B + 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. **Lös ekvationen:**

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Metod 1: Vi har

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2x^2(x^2 - 3x + 2).$$

Nu löser vi ekvationen $x^2(x^2 - 3x + 2) = 0$, vilket ger $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Metod 2: Vi observerar att ekvationen har grad 4 med avseende på x och att vi kan bryta ut x (som i första likheten ovan) så att ekvationen har en rot $x = 0$ och dessutom högst 3 rötter som svarar mot determinanten med första raden $1, x, x^2, x^3$. Genom insättningar av $x = 0, 1, 2$ konstaterar vi att determinanten är lika med 0 eftersom dessa insättningar ger två identiska rader. Alltså har ekvationen exakt 4 rötter $x = 0$ som dubbelrot och ytterligare rötterna 1 och 2.

5. **(a) Vad menas med att en uppsättning av vektorer $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_r$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende (linjärt oberoende)? Ge också lämpliga exempel som förklarar definitionerna.**

   (b) Visa att kolonnerna i en $(n \times n)-$matris A är linjärt beroende då och endast då determinanten av matrisen $\det A = 0$.

Se kursboken: Definitionerna 5.4, 5.5 och Sats 5.5.

6. **Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen:**

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finns det en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till denna matris? Motivera noga Ditt svar!

$$\det A = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(4-\lambda)(-5-\lambda)+18] = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2).$$

Detta ger alla egenvärden: $1-\lambda)[(4-\lambda)(-5-\lambda)+18] = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = 0$ då och endast då $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$.

För att beräkna egenvektorerna löser vi två ekvationssystem. För $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ får man $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ då och endast då:

$$\begin{array}{rrrl} 4x_1 & +6x_2 & & = x_1 \\ -3x_1 & -5x_2 & & = x_2 \\ -3x_1 & -6x_2 & +x_3 & = x_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrl} 3x_1 & +6x_2 & = 0 \\ -3x_1 & -6x_2 & = 0 \\ -3x_1 & -6x_2 & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \; x_1 \; +2x_2 \; = 0 \; \Leftrightarrow \begin{array}{rl} x_1 & = -2s \\ x_2 & = s \\ x_3 & = t \end{array}$$

där $s, t \in \mathbb{R}$. Egenvektorerna är i detta fall $(x_1, x_2, x_3) = s(-2,1,0) + t(0,0,1)$ och $s \neq 0$ eller $t \neq 0$.

För $\lambda_3 = -2$ får man $A\mathbf{x} = -2\mathbf{x}$ vilket är ekvivalent med

$$\begin{array}{rrrl} 4x_1 & +6x_2 & & = -2x_1 \\ -3x_1 & -5x_2 & & = -2x_2 \\ -3x_1 & -6x_2 & +x_3 & = -2x_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} 6x_1 & +6x_2 & & = 0 \\ -3x_1 & -3x_2 & & = 0 \\ -3x_1 & -6x_2 & +3x_3 & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} x_1 & = t \\ x_2 & = -t \\ x_3 & = -t \end{array}$$

$t \in \mathbb{R}$. Egenvektorerna är i detta fall $(x_1, x_2, x_3) = t(1,-1,-1)$, där $t \neq 0$. Det finns en bas bestående av egenvektorer: $(-2,1,0), (0,0,1), (1,-1,-1)$ ty dessa tre vektorer är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^3$ – determinanten vars kolonner (eller rader) är dessa vektorer är skild från 0.

7. **Ge exempel på:**

   (a) En (4×4)-ortogonalmatris (ON-matris) $A = (a_{ij})$ med alla element $a_{ij} \neq 0$,

   (b) En linjär avbildning $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $(A \neq \pm$ identitet) som bevarar längder av alla vektorer dvs $|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ för varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

   Motivera noga Dina svar!

(a) Vi kan t ex välja

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Kontrollera att matrisen är ortogonal!)

(b) Vi vet att en linjär avbildning bevarar längder då och endast då dess matris i standardbasen är ortogonal. Därför kan vi välja matrisen A från (a) och definiera avbildningen så att $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ för $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

8. **(a) Låt A och B vara två kvadratiska matriser av samma storlek. Visa att ”konjugatregeln” $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ gäller då och endast då matriserna A och B kommuterar dvs $AB = BA$.**

   (b) Låt B vara en matris sådan att $B^2 = 0$. Visa att matrisen $I + B$ har invers.

(a) Om $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ så är $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$ så att $-AB + BA = 0$ dvs $AB = BA$. Omvänt, om $AB = BA$ så är $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$.

(b) Vi vill visa att det finns en matris X sådan att $(I+B)X = I$. Definiera $X = I - B$. Då är $(I+B)(I-B) = I^2 - B^2 = I$ ty I och B kommuterar (dvs vi får använda ”konjugatregeln”), $I^2 = I$ och $B^2 = 0$.