Göteborgs universitet
Matematik/TW/MS HT06

LMA200 Analys/Läsanvisningar

OBS! Kommer att uppdateras under kursens gång.
Senast uppdaterad: 4/10-06.

Kapitel 0

Förberedande kapitel, läs igenom översiktligt. Räta linjens ekvation kan vara bra att repetera ordentligt.

Kapitel 1

1.1 Intervallbeteckningen kommer vi att använda ofta.

1.2 Funktionsbegreppet borde vara välbekant. Definitionsmängd ingår i detta delkapitel. I analys är man ofta mer intresserad av att ge en formel istället för att explicit ange definitionsmängden, och om ingenting annat sägs så är definitionsmängden den största delmängden av $\mathbb{R}$ där formeln fungerar.

1.3 Absolutbelopp och triangelolikheten kan vara bra att fördjupa sig i. OBS! Vilka reella tal x uppfyller att $|x+2| = 1$? Jo, x skall ligga 1 steg från -2 på reella tallinjen, nämligen $x = -1$ eller $x = -3$. Dessutom, när det gäller uttrycket $|f(x)|$, kom ihåg att det är tecknet på $f(x)$, inte på x, som avgör om det är lika med $f(x)$ eller $-f(x)$.

1.4 Ingenting nytt här. Kan vara bra dock att titta på graferna på s. 47-49.

1.5 Rationella funktioner, dvs kvoter mellan polynom, har vi sett tidigare. Återkommer även till rationella funktioner när vi infört gränsvärdesbegreppet. Så länge, studera graferna på s. 67-68.

1.6 Man kan definiera a^b, där a positivt och b godtyckligt reellt. Detta görs i flera steg. För att göra detta behöver man bland annat att x^q är strängt växande mot ∞, vilket vi skall se på föreläsningen. Egenskaperna (22) – (26) skall man kunna; (22) – (24) är självklara när exponenterna är positiva heltal, vilket kan vara till hjälp om man vill ha ett sätt att komma ihåg dem på. Beviset av (28) skall man kunna och likaså Sats 8 med bevis.

1.7 Logaritmfunktioner definieras som invers till exponentialfunktioner, även om begreppet invers funktion inte kommer förran i nästa avsnitt. Ett sätt att komma ihåg logaritmer är följande: ${}^a\log x$ är *det tal man skall upphöja* a *med för att få talet* x, dvs ${}^a\log x = y$ betyder att $a^x = y$ (om $a \neq 1$ och x positiva). Egentligen kan vi nöja oss med den naturliga logaritmen, ln, eftersom egenskapen (38) visar att alla logaritmfunktioner kan uttryckas med hjälp av ln. OBS! Logaritmlagarna (34) – (37) är en direkta konsekvenser av potenslagarna; (37) kan bevisas på samma sätt som (35). Sats 10 är en konsekvens av Sats 8; storleksordningen i oändligheten mellan logaritm-, potens- och exponentialfuntion skall man kunna.

1.8 I delkapitel **1.8.1** generaliseras proceduren i **1.7** till invers funktion i allmänhet. Att beräkna inversen till f (om den finns) gör man genom att lösa ekvationen $f(x) = s$ med avseende på x; om den ekvationen inte är entydigt lösbar så är f inte inverterbar. Sammansättning av funktioner kommer vi att möta på flera ställen i kursen. Dessutom, terminologin i **1.8.3** kommer vi ständigt att använda.

1.9 Stora delar av detta kapitel är repetition. Tabellerna på s. 97 och s. 98 är bra att kunna; i den senare kan man genom att använda en halv kvadrat och halv liksidig triangel ta fram värdena i tabellen. Viktigt att utgå från enhetscirkeln när man arbetar med de trigonometriska funktionerna. Observera att vi alltid mäter vinklar i radianer. Trigonometriska ettan (47), komplementvinkelsformeln (52) och additionsformeln (56) är ett absolut minimum av vad man ska kunna; (56) visas lättast i form av (54). Med hjälp av dessa kan ni härleda flertalet formler. Det är relativt enkelt att översätta mellan formlerna (54)-(57) med hjälp av (52) och att byta y mot $-y$. (58)-(61) är bra att kunna (och är också lätta att härleda). Omskrivningen av (66) enligt s. 106, hjälpvinkelmetoden, ska man kunna. Av tangens och cotangens är tangens klart viktigast; cotangens är bara dess inverterade värde. Sats 13, 14 och exempel 55 är viktiga.

1.10 De trigonometriska funktionerna är inte inverterbara, men med lämpliga inskränkningar av deras definitionsmängder blir de det. Mest använda är arcsin och arctan. Observera noga (72) och (73) och motsvarande samband för övriga arcusfunktioner.

1.11 De hyperboliska funktionerna definieras enkelt ur exponentialfunktionen och har egenskaper som liknar de trigonometriska funktioner, t.ex. hyperboliska ettan (77) och additionsformler.

Kapitel 2

Viktigt kapitel! Gränsvärdesbegreppet ligger till grund för derivata och integraler som till stor del är vad kursen handlar om. Vänj er så snart som möjligt med gränsvärdesdefinitionen.

2.1 Här ges definitionen av gränsvärde i flera olika situationer. I samtliga fall handlar det om att $f(x)$ kan göras så nära sitt gränsvärde som man önskar då x görs tillräckligt nära sin gränspunkt eller ∞, där "nära" ∞ betyder "stort". Samma princip gäller även för oegentliga gränsvärden, ∞ eller $-\infty$.

Tidigare har vi sett gränsvärden i kapitel 1, men här gör vi en mer systematisk genomgång. För beräkning av gränsvärden har man gränsvärdesreglerna i Sats 1-5 och en lista på *standardgränsvärdena*; en lista kommer i **2.4** men vi har redan sett några av dessa i kapitel 1, satserna 8, 10 och 14. Exempel 8 s. 140 är ytterligare en variant på gränsvärdet i sats 1.8 (och 1.10).

2.2 Kontinuitet är en mycket viktig egenskap hos en funktion $f(x)$, som kännetecknas av att grafen till kurvan $y = f(x)$ inte har några "skutt". Mer stringent, kännetecknas dessa av att en liten förändring av variabelvärdet ger en liten förändring av funktionsvärdet.

Exempel 13 ger två nya standardgränsvärden, och att $x^x \to 1$ då $x \to 0^+$ (som vi kan se i exempel 14) skall man också känna till. Den teknik som används i dessa exempel, nämligen att skriva om en exponering så att basen blir e, är ofta mycket användbar.

Egenskapen (14) s. 148, satsen om mellanliggande värden, har vi använt i kapitel 1 för att visa att $x^\alpha = a$ har en positiv lösning då $a > 0$ och $\alpha > 0$. Tillsammans med egenskapen (15) s. 149 fås att värdemängden till en kontinuerlig funktion på ett slutet begränsat intervall är ett slutet begränsat intervall.

2.3 I detta kapitel definieras talet e som ett gränsvärde av en talföljd; Sats 7 ger några varianter av denna definition. Egenskapen (16) som är karaktäristisk för de reella talen brukar kallas för *supremumaxiomet*. Sats 8 ger en förklaring till varför basen e för logaritm- och exponentialfunktion är så praktisk; med en annan bas a blir dessa gränsvärden $1/\ln a$ respektive $\ln a$.

2.4 Listar standardgränsvärden; endast (33) och (34) är nya.

2.5.1 Att beräkna asymptoter brukar ingå i konstruktion av funktionskurvor, återkommer till detta när vi har infört derivatabegreppet.

2.5.2 Tar upp intervallhalvering i samband med avsnitt 4.5.

Kapitel 3

3.1 Derivatabegreppet är centralt och motiveras ofta (som i detta delkapitel) med ögonblicklig (tillväxt)hastighet eller tangent till funktionskurva.

3.2 Derivatans definition och hur den används för att härleda olika derivator skall man kunna. Många derivator kommer vi sedan beräkna med hjälp av deriveringsregler och standardderivator. En första standardderivata härleds i exempel 4; vi skall senare se att formeln gäller även om n inte är ett positivt heltal (som t.ex. i exempel 3 där $n = 1/2$). Användning av derivata för att bestämma tangent och normal till en funktionskurva som i exempel 5 och 6 är fundamental. Derivatan till en funktion är själv en funktion som kan vara deriverbar, vi pratar då om andraderivatan. Första- och andraderivatan är centrala begrepp i studiet av max- och minproblem.

3.3 Sats 1 visar att en deriverbar funktion är kontinuerlig. Däremot gäller inte omvändningen; $f(x) = |x|$ är kontinuerlig i $x = 0$ men ej deriverbar där. Deriveringsreglerna (4) och (5) säger att derivering är en linjär operator, (6) är produktregeln (Leibnitz regel) och (7) är kvotregeln; var noga med tecknet i den sistnämnda! Kedjeregeln är lite mer komplicerad, i synnerhet beviset. Principen är dock naturlig; om en funktion är sammansatt av flera steg så är dess derivata lika med produkten av de olika stegens derivator. Även derivata av invers till en deriverbar funktion behandlas här, vilket är användbart när vi t.ex. vill bestämma derivatan av arcusfunktionerna (se **3.4**).

3.4 De elementära funktionernas derivator härleds. Med kännedom om derivatan av x^n och deriveringsregler fås derivator av *polynom och rationella funktioner*. Vi får derivator av *exponentialfunktioner och logaritmfunktioner* genom att använda standardgränsvärden. Även derivatan av $sinx$ fås med hjälp av standardgränsväde ($\lim_{x\to 0} sinx/x = 1$) samt trigonometriska formler. Tillämpning av kedjeregeln och komplementsvinkelformel ger därefter derivatan av $cosx$, och $tanx$ deriveras sedan med hjälp av kvotregeln. När vi bestämmer derivatan av $arctanx$ är det fördelaktigt att skriva om derivatan av $tanx$ som $1 + tan^2x$ istället för $1/cos^2x$. Arcusfunktionernas derivator bestäms med hjälp av regeln för derivata av invers funktion.

3.5 Två huvudpunkter:

- En inre extrempunkt för en deriverbar funktion är *stationär* eller *kritisk*, d.v.s. derivatan är 0 där. Däremot kan derivatan vara 0 utan att vi har en inre extrempunkt (detta sker då vi har en sadelpunkt).

- Medelvärdessatsen med dess konsekvenser: Om derivatan är 0 i ett intervall så är funktionen konstant där; om derivatan är positiv i ett intervall så är funktionen strängt växande där. En intuitiv tolkning av medelvädessatsen är att medelhastigheten under en färd måste överrensstämma med den ögonblickliga hastigheten vid något tillfälle under färden. Observera att *satsen om mellanliggande värden* är något annat (s. 148-149).

3.6 Läs t.o.m. sidan 208.

3.8 Handlar om att man faktiskt kan uppfatta dy/dx som en kvot; inte minst fysiker tycker om att använda beteckningarna dy och dx var för sig.

Kapitel 4

4.1-4.2 När vi vill rita grafen till en given funktion följer vi proceduren

A Studium av första derivatan; derivatans nollställen, lokala extrempunkter, inflexionspunkter.

B Gränsvärden; lodräta, vägräta och sneda asymptoter.

C Konvexitet, funktionens nollställen, symmetri.

D Använder slutsaterna från A-C till att rita graf.

Kurvritning är en av våra viktigaste tillämpningar av derivata. Denna är också lämplig för att besvara diverse frågor om funktionens beteende, t.ex. angående dess värdemängd som i exempel 1 avsnitt 4.2. Kom ihåg (14)-(15) s. 148-149 som ger att en *kontinuerlig* funktion på ett *slutet*, *begränsat* intervall antar såväl sitt maximum som sitt minimum. Sats 3.13 ger att extremvärdena söks

- i stationära punkter

- i punkter där derivatan inte existerar

- i intervallets ändpunkter

4.3 Optimering är en mycket viktig tillämpning av derivata. T.ex. kan det handla om att maximera vinst, minimera materialåtgång etc. Efter att man formulerat ett problem matematiskt kan man angripa det med t.ex. metoderna i 4.1-4-2 och därefter tolka resultatet i termer av det ursprungliga problemet.

4.4 Olikheter kan alltid omformuleras till att en viss funktion bara tar positiva värden, vilket återigen handlar om att undersöka dess värdemängd.

4.5 Här är vi bara intresserade av Newton-Raphson metoden.

Kapitel 5

5.1 Vi läser detta efter avsnitt 6.4 och bara t.o.m. s. 252.

Primitiv funktion F (i betydelsen ursprunglig) till en funktion f är sådan att $F' = f$. Alla primitiva funktioner till f ges av den **obestämda integralen** $\int f(x)\,dx$. Även termen *antiderivata* används ibland och betyder primitiv. (2)-(12) ger en lista på sådana vi känner till och kan läsas så att högerledets derivata är integranden i vänsterledet. Eftersom derivering är en linjär operator så gäller detsamma för dess omvändning: (15)-(16). (13) och (14) visar hur man kan känna igen derivator som uppstått med hjälp av kedjeregeln; allmänt gäller att om f har den primitiva funktionen F så har $f(g(x)) \cdot g'(x)$ den primitiva funktionen $F(g(x))$.

Kapitel 6

6.1 Att en funktion är integrerbar innebär att den kan approximeras så nära uppifrån och nedifrån med trappfunktioner att skillnaden mellan motsvarande över- och undersumma kan göras godtyckligt liten.

6.2 Kontinuerliga funktioner är integrerbara och integralen kan fås som ett gränsvärde av en *Riemannsumma* eftersom en sådan måste ligga mellan över- och undersummor baserade på samma indelning av integrationsintervallet.

6.3 Sats 5 ger integralens grundläggande egenskaper; märk (13) som gör (12) giltig för alla a, b, c, inte bara $a < c < b$. Integralkalkylens medelvärdessats är viktig, i synnerhet eftersom vi använder denna sats i beviset av Analysens huvudsats i nästa avsnitt.

6.4 Här visas sambandet mellan derivata och integral och vi får en metod för

att beräkna integraler förutsatt att vi kan bestämma en primitiv funktion till integranden. Vi läser t.o.m. s. 299.

6.5 Generaliserade integraler betyder bara att man först beräknar integralen över en del av intervallet och sedan gör gränsövergång, både om intervallet är obegränsat eller integranden är obegränsad.

Kapitel 7

7.1, 7.3 Areabestämning var grundmotiveringen bakom införandet av integraler och vi får här några exempel. Beräkning av volym är en annan typisk tillämpning. För den extra intresserade; beräkning av massa genom att integrera densitet ger en fysikalisk tillämpning, och beräkning av båglängd är förstås också intressant.