

Tentamensskrivning i LMA200 Geometri och linjär algebra 2

1. Låt $\mathbf{u} = (1 \ 3 \ 0)^t$ och $\mathbf{v} = (-2 \ -1 \ 0)^t$. Beräkna arean av den parallelogram som \mathbf{u} och \mathbf{v} spänner upp. Bildar $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_3$, där $\mathbf{e}_3 = (0 \ 0 \ 1)^t$, ett höger- eller vänstersystem?
2. (a) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
 $3x + 5y - 4z = 7$, $3x + 2y - 4z = 1$ och $6x + y - 8z = -4$.
(b) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
 $y - 4z = 8$, $2x - 3y + 2z = 1$ och $5x - 8y + 7z = 1$.
(c) Beskriv geometrin i (a) och (b). (4p)
3. Visa att vektorerna $(1 \ -1 \ 4)^t$, $(3 \ -5 \ 7)^t$ och $(-1 \ 5 \ 6)^t$ är linjärt beroende och ange en icke-trivial linjärkombination av dem som är $\mathbf{0}$.

4. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Låt A vara en $m \times n$ -matris och \mathbf{b} en m -vektor. Betrakta det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Visa att om \mathbf{x}_1 och \mathbf{x}_2 är lösningar till (1) så är $\mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ lösning till (1) för varje $t \in \mathbb{R}$.

6. För en godtycklig vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, bestäm dess projektion i planet $x - 2y + 2z = 0$.

7. Vi vet att matrisen för spegling i linjen med riktningsvinkel α är $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

och att matrisen för rotation vinkeln θ är $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Visa att sammansättningen av en spegling, en rotation och samma spegling, $S_\alpha R_\theta S_\alpha$, är en rotation och bestäm rotationsvinkeln. Detta kan göras via resonemang eller via uträkning.

8. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ och visa att egenvektorerna till det ena egenvärdet är ortogonala mot egenvektorerna till det andra egenvärdet.

Varje uppgift utom nr. 2 ger max 3 poäng.

För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng av 25.

Tentan beräknas vara färdig rättad tisdagen den 22 augusti kl 10, varefter resultat kan fås på tel. 772 3500. Tentor kan hämtas på MV:s expedition varje vardag 8.30–13.00.