MATEMATIK
Göteborgs universitet
TW

20 januari 2007, 8.30-13.30
Inga hjälpmedel
Telefon: 0762-72 18 61, 72 18 60

Tentamensskrivning i LMA200
Geometri och linjär algebra 2

1. Låt $\mathbf{u} = (1 \quad -3 \quad 2)^t$, $\mathbf{v} = (-1 \quad -2 \quad 1)^t$ och $\mathbf{w} = (2 \quad 1 \quad 1)^t$. Beräkna volymen av den parallellepiped som $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ spänner upp. Bildar $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ett höger- eller vänstersystem?

2. (a) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   $x + y + 2z = 0,\ x - 2y - 3z = 1$ och $2x - y - z = 1\,.$

   (b) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   $x + y + 2z = 0,\ x - 2y - 3z = 1$ och $2x - y - z = -3\,.$

   (c) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   $x + y + 2z = 0,\ x - 2y - 3z = 1$ och $2x - y + z = -3\,.$

3. Visa att vektorerna $(5 \quad -2 \quad 3)^t$, $(1 \quad 2 \quad 3)^t$ och $(-2 \quad 4 \quad 2)^t$ är linjärt beroende och ange en icke-trivial linjärkombination av dem som är $\mathbf{0}$.

4. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. En kvadratisk matris A kallas en projektion om $A^2 = A$. Visa att om A är en projektion så är även $I - A$ en projektion, där I är enhetsmatrisen.

6. För en godtycklig vektor $\mathbf{u} = (x \quad y \quad z)^t$, bestäm dess spegling i planet $x - 2y + 2z = 0$.

7. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ har en egenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ och bestäm egenvärdet.

8. Bestäm alla egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 \end{pmatrix}$. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara egenvektorer till var sitt egenvärde och bestäm s och t så att $s\mathbf{u} + t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beräkna vad som händer med $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ då $n \to \infty$. (4p)

Varje uppgift utom nr. 8 ger max 3 poäng.
För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng av 25.

Tentan beräknas vara färdigrättad tisdagen den 30 januari kl 10, varefter resultat kan fås på tel. 772 3500. Tentor kan hämtas på MV:s expedition varje vardag 8.30–13.00.