Statistik för Lärare 2006
Tentamen

Onsdag 11 april 2007, kl: 8.30-13.30, sal V.
Examinator och jour: Johan Tykesson, tel 0703-182096.
Hjälpmedel: Formelsamling som delas ut tillsammans med tentamenstesen och valfri miniräknare med tomt minne.
Max: 30p, Godkänd: 12p, Väl Godkänd: 21p.
Till poängen på tentamen läggs eventuella bonuspoäng.

OBS!: Lösningar skall redovisas till varje uppgift.
OBS!: Text på två sidor.
OBS!: Uppgifterna ej ordnade efter svårighetsgrad.

Rättningsprotkoll anslås senast 3 veckor efter tentamen.

---

1. Antag X är en kontinuerlig stokastisk variabel (dvs. slumpvariabel) med täthetsfunktion
$$f_X(x) = \begin{cases} cx^3, & 1 < x < 4; \\ 0, & \text{annars}. \end{cases}$$
där c är en konstant.
   (a) (1p.) Bestäm konstanten c.
   (b) (1p.) Beräkna $\mathbf{E}(X)$.
   (c) (1p.) Beräkna sannolikheten att X ligger mellan 3 och 4.

2. (3p.) På ett kontor finns tre stycken skrivare. Beteckna skrivarna med A, B och C. Till skrivarna skickas utskrifter från kontorets datorer. Det gäller att sannolikheten att skrivare A får en viss utskrift är 0.2, sannolikheten att B får den är 0.5 och sannolikheten att C får den är 0.3. Sannolikheten att det blir papperstrassel vid en utskrift är 0.03 för skrivare A, 0.06 för skrivare B och 0.01 för skrivare C. Givet att vi får papperstrassel vid en utskrift, vad är sannolikheten att det var skrivare C som utskriften skickades till?

3. (a) (2p.) Bevisa att om händelserna A och B är disjunkta och $\mathbf{P}(A) > 0$ och $\mathbf{P}(B) > 0$ så gäller det att A och B inte är oberoende.
   (b) (2p.) Antag A och B är händelser sådana att $\mathbf{P}(A) = 0.6$ och $\mathbf{P}(B) = 0.2$ och $\mathbf{P}(A \cup B) = 0.64$. Är A och B oberoende händelser?

4. (a) (3p.) Peter och Oskar delar på en tårta slumpmässigt. Antag Oskars andel är likformigt fördelad mellan 0 och 1. Vad har Peters andel för fördelning?
   (b) (3p.) Antag att den kontinuerliga stokastiska variabeln X har fördelningsfunktion x^4 då $0 \leq x \leq 1$. Bestäm fördelningsfunktionen för X^8.

5. (4p.) Ett företag har konstruerat ett nytt däck för racercyklar, och man vill undersöka om det nya däcket är mer hållbart än företagets förra däck. Låt X vara sträckan som ett slumpmässigt utvalt däck av den gamla sorten håller innan det drabbas av sin första punktering, och låt Y vara sträckan som ett slumpmässigt utvalt däck av den nya sorten håller innan det drabbas av sin första punktering. Vi antar att $X \sim N(\mu_x, \sigma)$ och $Y \sim N(\mu_y, \sigma)$, dvs X och Y är normalfördelade med olika väntevärden men med samma varians. Antag också att σ är okänt. Vi testar 12 slumpmässigt utvalda däck av den gamla sorten och observerar stickprovsmedelvärdet $\bar{x} = 1200$ kilometer samt stickprovsstandardavvikelsen $s_x = 80$ kilometer. Av den nya sorten testar vi 14 slumpmässigt utvalda däck och observerar $\bar{y} = 1250$ kilometer och $s_y = 120$ kilometer. Beräkna ett 99% konfidensintervall för $\mu_x - \mu_y$. Hur skall man tolka det beräknade konfidensintervallet?

6. (3p.) Man undersöker om en enkrona är symmetrisk eller inte. Man gör 100 oberoende kast med myntet och man får klave 48 gånger och krona 52 gånger. Låt p vara sannolikheten att man får klave med ett kast. Beräkna ett 99% konfidensintervall för p. Kan man förkasta hypotesen $H_0 : p = 1/2$ för hypotesen $H_1 : p \neq 1/2$ på nivå $\alpha = 0.01$?

7. Låt (X, Y) vara en diskret tvådimensionell stokastisk variabel med tvådimensionell simultan sannolikhetsfunktion $p_{XY}(j, k)$ där $p_{XY}(1, 1) = 1/9$, $p_{XY}(1, 2) = 1/9$, $p_{XY}(1, 3) = 0$, $p_{XY}(2, 1) = 1/9$, $p_{XY}(2, 2) = 1/27$, $p_{XY}(2, 3) = 2/27$, $p_{XY}(3, 1) = 0$, $p_{XY}(3, 2) = 2/9$ och $p_{XY}(3, 3) = 1/3$.

   (a) (2p.) Beräkna $\mathbf{P}(X = 2 \text{ eller } 3)$.

   (b) (2p.) Beräkna $\mathbf{P}(Y = 2 | X = 1)$.

8. (3p.) Formulera och bevisa lagen om total sannolikhet.