

Tentamensskrivning i LMA210 Linjär algebra

1. Enhetskuben i \mathbb{R}^3 är den som spänns upp av standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Beräkna volymen av dess bild under avbildningen med matris $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Är avbildningen orienteringsbevarande, dvs. bildar standardbasvektorernas bilder ett högersystem?
2. (a) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen $x + 2y + 3z = 3$, $x + y - z = 2$ och $x + 3y + 7z = 4$.
(b) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen $x + 2y + 3z = 3$, $x + y - z = 2$ och $x + 3y + 7z = 0$.
(c) Beskriv geometrin i (a) och (b).
3. Ange en icke-trivial linjärkombination av vektorerna $(1 \ 1 \ 1)^t$, $(2 \ 1 \ 3)^t$ och $(3 \ -1 \ 7)^t$ som är $\mathbf{0}$. Finns det flera sådana linjärkombinationer?
4. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
5. Låt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vara lösningar till ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A är matrisen $(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})$, dvs. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är kolonnvektorerna. Uttryck \mathbf{u} och \mathbf{b} som linjärkombinationer av \mathbf{v} och \mathbf{w} .
6. Visa att 3 inte är ett egenvärde till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.
7. Motivera att det finns en speglingsmatris som avbildar vektorn $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ och bestäm den matrisen.
8. Bestäm alla egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$. Bestäm en egenvektor till vardera egenvärdet, motivera att varje vektor \mathbf{x} i planet kan skrivas som en linjärkombination av dessa samt att $A^n \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ då $n \rightarrow \infty$. (4p)

Varje uppgift utom nr. 8 ger max 3 poäng.

För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng av 25.

Tentan beräknas vara färdigreddad tisdagen den 29 januari kl 10, varefter resultat kan fås på tel. 772 3500. Tentor kan hämtas på MV:s expedition varje vardag 8.30–13.00.