MATEMATIK
Göteborgs Universitet
MS

20 oktober 2006, 8.30-13.30
Hjälpmedel: Miniräknare
Telefon: Marcus Sundhäll 076-2721861

Tentamensskrivning i Analys 4p, LMA200

1. a) Bestäm a så att

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + a}{x^2 + 1}$$

har ett lokalt extremvärde då $x = -1$. Undersök därefter kurvan $y = f(x)$ med avseende på asymptoter, växande och konvexitet. Är $f(-1)$ även ett globalt extremvärde? (3p)

b) Bestäm a så att

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + a}{x^2 - x} = 3\,. \quad (1p)$$

2. Visa att

$$e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

för alla $x > 0$. (3p)

3. Beräkna följande integraler:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$ (1p)

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,dx$ (1p)

c) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) dx$ (1p)

4. a) Beräkna $f'(x)$ om

$$f(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}\right|. \quad (1p)$$

b) Bestäm arean av området i första kvadranten som begränsas av y-axeln och kurvorna

$$y = \frac{1}{1-x}\,; \text{ där } x < 1, \quad \text{och} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}}\,. \quad (2p)$$

Forts. →

5. a) Använd $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ till att visa

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{och} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad (0{,}5\text{p})$$

b) Det område som begränsas av kurvorna $y = \sin^2 x$ och $y = 1 - \cos x$ över intervallet $[0, a]$, där a är den minsta positiva roten till ekvationen $\sin^2 x = 1 - \cos x$, får rotera kring x-axeln. Bestäm volymen av den rotationskropp som erhålls. (2,5p)

6. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (3p)

7. Antag att $a > 1$. Bevisa att

$$\frac{a^x}{x} \to +\infty \quad \text{då} \quad x \to +\infty\,. \quad (3\text{p})$$

8. Undersök hur antalet reella rötter till ekvationen $k = f(x)$ varierar då $k \in \mathbb{R}$, där

$$f(x) = \int_0^{(x-1)^2+1} te^{-t^2}\,dt\,. \quad (3\text{p})$$

För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng.

På samtliga uppgifter skall alla beräkningar och motiveringar redovisas.

Tentan beräknas vara färdigrättad fredagen den 27 oktober.

Lycka till!
/MS