Göteborgs universitet
Matematik/TW/EW HT07

LMA210 Analys. Läsanvisningar

Kapitel 1

1.1 Intervallbeteckningarna kommer vi att använda ofta.

1.2 Funktionsbegreppet borde vara välbekant, t ex från förra terminens kurser. I kursen studerar vi funktioner från (delmängder av) de reella talen till (delmängder av) de reella talen.

1.3 Funktionen *absolutbeloppet* har vi redan mött både för komplexa tal och vektorer i tidigare kurser i vilka fall namnet på triangelolikheten är lätt att förstå geometriskt. För reella tal är den närmast trivial (och följer förstås också från att den gäller för komplexa tal, men det får ses som en omväg!) men vi kommer att använda den ofta. När det gäller att behandla uttryck av typen |f(x)|, kom ihåg att det är tecknet på f(x), inte på x, som avgör om det är lika med f(x) eller -f(x).

De kommande avsnitten behandlar de så kallade elementära funktionerna, polynom, rationella funktioner, exponential-, potens- och logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner, arcusfunktioner och hyperboliska funktioner, varav de flesta nog är välbekanta.

1.4 *Polynom* har vi sett tidigare. Läs igenom själva. Observera att produkter och summor av polynom är polynom, men i allmänhet inte kvoter av polynom.

1.5 *Rationella funktioner* är kvoter av polynom. Vi kommer att studera graferna av rationella funktioner mer i detalj efter att ha infört gränsvärde och derivata.

1.6 *Potens- och exponentialfunktioner.* Man kan definiera potenser a^α för $a > 0$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ så att samma räkneregler gäller som för “vanliga” heltalspotenser. Varierar man basen a får man en *potensfunktion* x^α, definierad för $x > 0$. Varierar man istället exponenten α fås en exponentialfunktion a^x, definierad för alla $x \in \mathbb{R}$. Beviset av (28) som säger att exponentialfunktionen $a^x \to \infty$ då $x \to \infty$ om $a > 1$, skall man kunna liksom Sats 8 med bevis. Sats 8 säger att exponentialfunktionerna växer snabbare då $x \to \infty$ än potensfunktionerna.

1.7 *Logaritmfunktioner* definieras som inverser till exponentialfunktioner, även om begreppet invers funktion inte kommer förrän i nästa avsnitt. a-logaritmen för s, ${}^a\log s$, är det tal man skall upphöja a med för att få talet s, d v s ${}^a\log s = y$ betyder att $a^s = y$. Logaritmlagarna (34)-(37) är direkta följder av potenslagar; (35) och (37) skall man kunna. Sats 10, som säger att potensfunktioner växer snabbare än logaritmfunktioner, är en direkt följd av Sats 8; storleksordningen i oändligheten mellan logaritm-, potens- och exponentialfunktion skall man kunna. Observera att (38) gör att alla logaritmer kan uttryckas i den så kallade naturliga logaritmen med bas e; ofta räknar man med denna.

1.8 *Kompletteringar av funktionsbegreppet* Sammansättningen $g \circ f$ av funktionerna $f : X \to Y$ och $g : Y \to Z$ är den funktion från X till Z som avbildar x på $g(f(x))$. Inversen till en bijektiv (injektiv och surjektiv) funktion $f : X \to Y$ är den funktion $g : Y \to X$ som uppfyller att $g \circ f$ och $f \circ g$ är identitetsavbildningarna på X respektive Y. Man skall veta vad det innebär att en funktion är injektiv, surjektiv, bijektiv, (svagt) växande, (svagt) avtagande, uppåt/nedåt begränsad, udda eller jämn.

Tillägg till Persson-Böiers avsnitt 1.8.1: en funktion $f : X \to Y$ är *surjektiv* om för alla $y \in Y$ det finns (minst) ett x så att $f(x) = y$, d v s om $f(X) = Y$. Om f är injektiv och surjektiv sägs den vara *bijektiv*. Den har då en invers.

1.9 *Trigonometriska funktioner* Mycket av detta är repetition. Man bör vara säker på de trigonometriska funktionernas värden enligt tabellerna på s. 97 och 98; de senare kanske inte nödvändigtvis som minneskunskap utan som resultat av användning av halv kvadrat och halv liksidig triangel. Grunden för de trigonometriska funktionerna är dock enhetscirkeln enligt def. s. 97. Observera att vi alltid mäter vinklar i radianer. Det finns "hur många formler som helst" för de trigonometriska funktionerna men de är långt ifrån oberoende av varandra, så ur ett relativt fåtal kan man härleda de andra. Trig.ettan (47), komplementvinkelformeln (52) och additionsformeln (56) är ett absolut minimum av vad man skall kunna; (56) visas lättast i form av (54). Det är relativt enkelt att översätta mellan formlerna (54)-(57) m.hj.a. (52) och att byta y mot $-y$. (58)-(61) är också bra att kunna (och är lätta att härleda). Omskrivningen av (66) enl. s. 106, hjälpvinkelmetoden, skall du kunna. Av tangens och cotangens är tangens klart viktigast; cotangens är bara dess inverterade värde. Sats 13, 14 och ex. 55 är viktiga. De rör relationen mellan $\sin x$, $\tan x$ och x när x närmar sig noll.

1.10 *Arcusfunktioner* Arcusfunktionerna är inverser till de trigonometriska funktion (med väl valda definitionsområden). (Observera noga (72) och (73) och motsvarande samband för övriga arcusfunktioner: $\arcsin(\sin(x))$ är definierat för alla $x \in \mathbb{R}$ men är bara lika med x i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, medan $\sin(\arcsin(x)) = x$ för alla x i definitionsmängden.)

1.11 *Hyperboliska funktioner* De hyperboliska funktionerna definieras i termer av exponentialfunktioner. De är "hyperboliska" varianter av de trigonometriska funktionerna ($(\cos\theta, \sin\theta)$ definierar en hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, istället för som i det trigonometriska fallet en cirkel $x^2 + y^2 = 1$) och påminner i mycket om sina trigonometriska motsvarigheter. De dyker upp naturligt i fysiken, det mest kända exemplet är kanske att en fritt hängande kedja beskrivs av cosinushyperbolicus.

Kapitel 2 - Gränsvärden

Gränsvärdesbegreppet är centralt i kursen. Det används för att definiera viktiga begrepp som kontinuitet, derivata och integral.

2.1 Här definieras gränsvärden av en funktion $f(x)$ då x går mot $\pm\infty$ eller mot en punkt $a \in \mathbb{R}$. Vi definierar också höger- och vänstergränsvärden då x närmar sig a från höger respektive vänster. I samtliga fall handlar det om att $f(x)$ kommer godtyckligt nära sitt gränsvärde $A \in \mathbb{R}$ eller $\pm\infty$. Att $f(x)$ kommer "nära" ∞ skall tolkas som att $f(x)$ blir godtyckligt stort.

Vi har redan mött några gränsvärden i kapitel 1 men gör nu en mer systematisk genomgång. För beräkning av gränsvärden har man gränsvärdesreglerna i Sats 1-5 och en lista på "standardgränsvärden"; en lista kommer i 2.4 men vi har redan sett några av dessa i kapitel 1, satserna 8, 10 och 14. Ex. 8 s. 140 är ytterligare en variant på gränsvärdet i sats 1.8 (och 1.10).

2.2 *Kontinuitet* är en mycket viktig egenskap hos en funktion och kan beskrivas som att en liten förändring av variabelvärdet bara ger en liten förändring av funktionsvärdet. Moraliskt är en funktion kontinuerlig om dess graf är sammanhängade. Här görs en formell definition i termer av gränsvärden.

Ex. 13 ger två nya standardgränsvärden, och att $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$ (Ex. 14) skall man också känna till. Att som i dessa exempel skriva om en exponentiering så att basen blir e är ofta mycket användbart. De viktiga egenskaperna (14) och (15) s. 148-149 kan sammanfattas: Värdemängden till en kontinuerlig funktion på ett slutet begränsat intervall är ett slutet begränsat intervall.

2.3 *Talet e, den naturliga logaritmens bas* definieras som gränsvärde av en talföljd; sats 7 ger några varianter av denna definition. Egenskapen (16) som är karakteristisk för de reella talen brukar kallas supremumaxiomet.

Sats 8 ger en förklaring till varför basen e för logaritm- och exponentialfunktion är så praktisk: med en annan bas a blir dessa gränsvärden $1/\ln a$ resp. $\ln a$.

2.4 Ger som utlovat en lista på standardgränsvärden; dessa skall man kunna och kunna använda. Endast (33) och (34) är nya.

2.5.1 Att beräkna *asymptoter* brukar ingå i konstruktion av funktionskurvor, vilket vi skall ägna oss åt mer när vi infört derivatabegreppet, och vi tar upp detta avsnitt då.

2.5.2 *Lösning av ekvationer genom intervallhalvering* tar vi upp i samband med avsnitt 4.5.

Kapitel 3 - Derivator

3.1 Derivatabegreppet är centralt och motiveras ofta med ögonblicklig (tillväxt)hastighet eller tangent till funktionskurva. Derivatan av en funktion f i en punkt x_0 är ett mått på f's förändring i x_0.

3.2 *Derivatans definition* som gränsvärdet av en så kallad differenskvot måste man naturligtvis kunna. De flesta derivator kommer vi att beräkna med hjälp av deriveringsregler och standardderivator, men i vissa lägen kan man bli tvungen att gå tillbaka till definitionen.

En första standardderivata, $Dx^n = nx^{n-1}$ härleds i Ex. 4; vi skall senare se att samma formel gäller även om n inte är ett positivt heltal. Ex. 3 är f.ö. fallet n = 1/2.

Användningen av derivata för att beräkna tangent och normal till en funktionskurva som i ex. 5 och 6 är fundamental. Derivatan till en funktion är själv en funktion som kan vara deriverbar, vilket leder till andraderivata (och så vidare, men det är främst första och andra derivata som vi använder).

3.3 *Deriveringsregler* Sats 1 säger att en funktion som är deriverbar är kontinuerlig. Observera att omvändningen inte är sann, $|x|$ är ett motexempel till detta.

Sats 2 ger formler för derivator av summor, produkter och kvoter av funktioner. Sats 3, kedjeregeln, beskriver derivatan av sammansättningen av funktioner: om en funktion är sammansatt av flera steg så är dess derivata lika med produkten av de olika stegens derivator. Tänker man på derivata som skalförändring är detta intuitivt klart, vilket f.ö. också gäller derivatan av invers funktion; det som inte utan vidare är klart i det sista fallet är att inversen (om den existerar) till en deriverbar funktion är deriverbar.

3.4 *De elementära funktionenernas derivator* Derivatan av *polynom* och *rationella funktioner* följer med deriveringsreglerna ovan från derivatan av x^n. *Exponentialfunktionens* respektive *logaritmfunktionens* derivata erhålles m. hj. a. standardgränsvärdena i Sats 2.8 s. 154, och ur dem härleds derivatan av den allmänna *potensfunktionen*.

Sinusfunktionens derivata härleds m.hj.a. en trigonometrisk formel och standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0} sinx/x = 1$. Tillämpning av kedjeregeln och komplementsvinkelformeln ger derivatan av *cosinus* och *tangens* deriveras sedan m h a kedjeregeln (och trigonometriska ettan). *Arcusfunktionernas* derivator härleds sedan ur dessa m h a regeln för derivata av invers funktion. Slutligen är de *hyperboliska funktionernas* derivator är enkla konsekvenser av definitionerna och exponentialfunktionens derivata. Jämför med de trigonometriska funktionernas derivator!

3.5 *Allmänna egenskaper hos deriverbara funktioner* Detta är ett viktigt avsnitt som beskriver hur egenskaper hos en funktion reflekteras i dess derivata. Sats 13 säger att derivatan i en lokal extrempunkt (max/min) är noll. Obs att omvändningen inte är sann, x^3 är ett motexempel till detta. Medelvärdessatsen (Sats 14) används bl a för att härleda följande viktiga egenskaper: Om derivatan av f är noll i ett intervall är f konstant i intervallet (Sats 15) och om derivatan av f är (strikt) positiv i ett intervall så är f (strängt) växande i intervallet (Sats 16). Medelvärdessatsen används också för att uppskatta funktioner. Om $|f'| \leq M$ så gäller $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$, jämför med Exempel 19.

3.6 *Derivator av högre ordning* Vi kommer framför allt använda derivator av ordning 2 i samband med kurvkonstruktion i kap 4. Läs avsnittet översiktligt, ni skall kunna notationen.

3.8 *Differentialer* Handlar om hur man kan uppfatta dy/dx som en kvot;

inte minst fysiker gillar att använda beteckningarna dy och dx var för sig.

Kapitel 4 - Användning av derivator

4.1-2 *Kurvkonstruktion, (lokala) extrempunkter*
När vi vill rita grafen till en funktion kan vi följa proceduren:

1. Undersök symmetri (är f jämn eller udda?).
2. Studium av derivatan, derivatans nollställen, lokala extrempunkter, stationära punkter.
3. Studium av andraderivatan, konvexitet.
4. Asymptoter (avsnitt 2.5.1 s. 157-164). Vad händer när vi närmar oss en punkt där funktionen inte är definierad, vad händer när vi närmar oss $\pm\infty$?
5. Sammanfatta ovanstående i en värdetabell, ange även funktionens nollställen.
6. Skissa kurvan.

Definitionen av lokala extrempunkter skall man kunna. Sats 1 beskriver extrempunkter och stationära punkter i termer av derivatans teckenväxling, Sats 2 i termer av andraderivatan.

4.3 *Optimeringsproblem* (maximering av vinster, minimering materialåtgång o s v) kan ofta formuleras som att hitta en viss funktions extremvärden, vilket kan lösas genom att hitta derivatans nollställen.

4.4 Olikheter kan alltid omformuleras till att visa att en viss funktion bara tar positiva värden, vilket kan analyseras m h a funktionens derivata.

4.5 *Numerisk lösning av ekvationer* Här ingår framför allt Newton-Raphsons metod.

4.6 En funktion är *konvex (konkav)* om funktionskurvan "mellan" två punkter ligger under (över) den linje, kordan, som binder samman dem. Konvexitet (konkavitet) kan uttryckas i termer av derivator. Om f är en två gånger deriverbar funktion är den konvex precis där dess derivata är växande (avtagande), eller alternativt dess andraderivata är positiv (negativ).

Kapitel 5 - Primitiva funktioner

5.1 En *primitiv* (i betydelsen ursprunglig) funktion, eller obestämd integral, F till en funktion f är sådan att$F' = f$; även termen antiderivata förekommer (åtminstone på engelska). (2)-(12) ger en lista över de primitiva funktionernas derivator, dessa skall man kunna. Eftersom derivering är en linjär operator, gäller detsamma för dess omvändning: (15)-(16). Vi kommer inte behandla särskilt "svåra" primitiva funktioner i kursen; detta kommer i fortsättningskursen. Dock skall man kunna hitta primitiva funktioner till enkla funktioner genom att använda kedjeregeln för derivator baklänges: om F är en primitiv funktion till f är $F(g(x))$ en primitiv funktion till $f(g(x))g'(x)$.

Kapitel 6 - Integraler

6.1 Definition av *(Riemann-) integrerbarhet* och *integral*. En funktion är integrerbar om den kan approximeras så nära uppifrån och nedifrån med trappfunktioner att skillnaden mellan motsvarande över- och undersumma kan göras godtyckligt liten. Integralen definieras som gränsvärdet av under-/översumman.

6.2 Kontinuerliga funktioner är integrerbara. Ett sätt att beräkna integralen av en kontinuerlig funktion f är som ett gränsvärde av Riemannsummor. En Riemannsumma av f är en approximation av integralen av f som en integral av en trappfunktion som approximerar f.

6.3 Sats 5 ger grundläggande räkneregler för integraler, vilka är användbara för beräkning och uppskattning av integraler; ofta är det svårt att beräkna integralen av en funktion f exakt, men genom att approximera f med enklare funktioner och tillämpa regel (11) kan man få relativt bra uppskattningar av integralen av f. Beviset för räknereglerna består väsentligen av att konstatera att räknereglerna gäller för trappfunktioner (Sats 1 s 286), vilket är enkelt att se, och att sedan visa att de bevaras under gränsövergång. Integralkalkylens medelvärdessats är ett användbart verktyg, som bland annat används i analysens huvudsats i nästa avsnitt.

6.4 *Analysens huvudsats* är ett viktigt resultat som relaterar besgreppen derivata och integral. Med hjälp av den och dess följdsats *insättningsformeln* kan man beräkna integraler genom att hitta primitiva funktioner - det sätt man analytiskt ofta beräknar integraler. I praktiken beräknas integraler oftast numeriskt (avsnitt 7.11 innehåller något om detta).

6.5 De integraler vi behandlat i avsnitten ovan har varit integraler av begränsade funktioner över begränsade intervall. Generaliserade integraler är integraler där man tillåter obegränsade integrander och integrationsområden; de definieras som gränsvärden av "vanliga" integraler.

Kapitel 7 - Tillämpningar av integraler

7.1 Integraler kan användas för att beräkna areor av ytor i planet. Speciellt är ju integralen $\int f(x)dx$ av en funktion $f(x) \geq 0$ lika med arean mellan f's graf och x-axeln.

7.3 Mera generellt kan integraler sägas handla om beräkning av summor där antalet termer går mot oändligheten samtidigt som varje term går mot 0; beräkning av volym är en annan typisk användning. I detta avsnitt visas hur volymer av rotationskrppar kan beräknas m h a de s k "skiv-" och "rörformlerna".