Matematik
Göteborgs Universitet
iP

Lösningar till tentamensskrivning i Analys LMA210 GU
(10 januari 2009)

① (a) $\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/3x} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{3x}} = e^{\frac{1}{3}}$ ty

$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ och $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$.

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3e^x - x^4}{\ln x - 2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{x^4}{e^x}}{\frac{\ln x}{e^x} - 2} = -\frac{3}{2}$ ty

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$ och $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$.

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(x-1)(x+1)} = \left(\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}\right) =$

$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

② $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ är definierad på $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

<u>Asymptoter</u>: $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^2}{0+} = +\infty \Rightarrow$ <u>$x=-1$</u> är en lodrät asymptot

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2x+1} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ <u>$y=1$</u> är en vågrät asymptot i $\pm\infty$

<u>Derivatan</u>: $f'(x) = \frac{2x(x+1)^2 - x^2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x}{(x+1)^3}$.

<u>Stationära punkter</u>: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	∦	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ∦ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

lokalt min (även globalt)

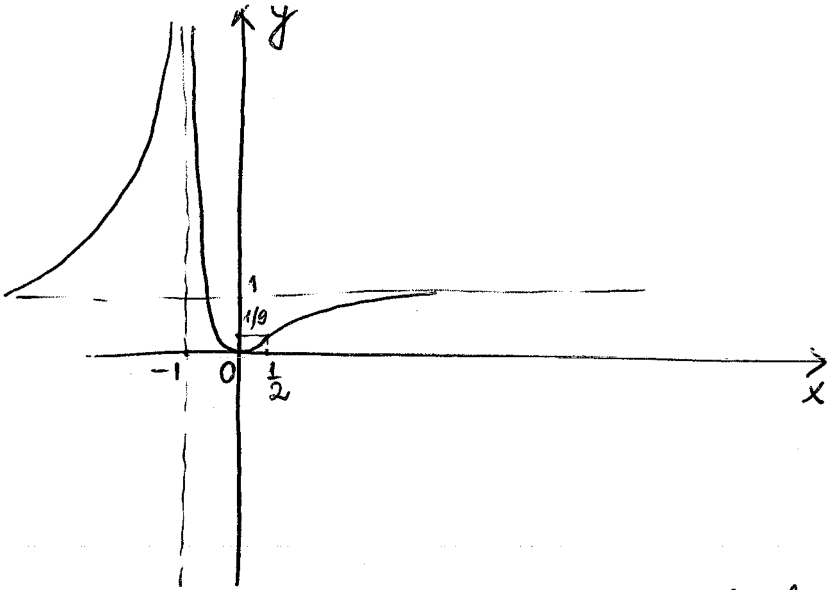
<u>Konvexitet</u>: $f''(x) = \dfrac{2(x+1)^3 - 2x\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \dfrac{-4x+2}{(x+1)^4}$.

$f''(x) = 0 \iff -4x+2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\cup$		$\cup$	$1/9$	$\cap$	
		konvex		konvex		konkav	

$x = \frac{1}{2}$ är inflexionspunkt.

<u>Graf</u>:



③ (a) Låt $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$. Vi har $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ och $f'(x) = 0$ endast i $x = 0$. Detta implicerar att f är strängt växande i intervallet $[0, +\infty[$. Alltså får vi $f(x) > f(0) = 0$ om $x > 0$.

(b) Låt $f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4 = \frac{-x^6}{1+x^2} \leq 0$ och $f'(x) = 0$ om $x = 0$. Vi får alltså att f är strängt avtagande och detta implicerar att $f(x) < f(0) = 0$ om $x > 0$.

$f(x) < 0$ är ekvivalent med $\arctan x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} < 0 \iff$

$\iff \arctan x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ $(x > 0)$.

④ (a) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 + \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.$

(b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} = -1+2 = 1.$

(c) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{1/2} + e.$

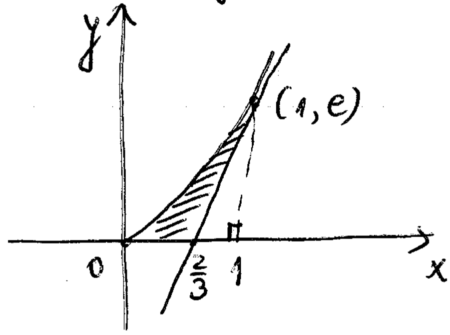
⑤ Tangenten till kurvan i punkten $(1,e)$ har ekvationen:

$y - e = y'(1)(x-1)$

Vi har: $y' = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1+2x^2)e^{x^2} \Rightarrow y'(1) = 3e \Rightarrow$ tangenten är given av ekvationen $y - e = 3e(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = 3ex - 2e}.$

Skärningspunkten mellan tangenten och x-axeln:

$y = 0 \Rightarrow 3ex = 2e \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}.$



$\text{Area} = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx - \int_{\frac{2}{3}}^1 (3ex - 2e)\,dx =$

$= \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{3ex^2}{2} - 2ex\right]_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{e-1}{2} - \frac{e}{6} =$

$= \boxed{\frac{e}{3} - \frac{1}{2}}.$

<u>Obs!</u> I stället för $\int_{\frac{2}{3}}^1 (3ex-2e)\,dx$ kan man skriva direkt arean av triangeln ABC, där $A(1,e)$, $B(\frac{2}{3},0)$, $C(1,0)$, som är $\frac{e}{6}$.

⑥ Volymen ges av formeln:

$\int_0^{\pi/2} \pi f^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \pi(\sin x + 2\cos x)^2\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + 4\sin x\cos x +$

$+ 4\cos^2 x)\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} (1 + 3\cos^2 x + 2\sin(2x))\,dx =$

$= \pi\int_0^{\pi/2} \left(1 + 3\cdot\frac{1+\cos(2x)}{2} + 2\sin(2x)\right)dx = \pi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{5}{2} + \frac{3\cos 2x}{2} + 2\sin 2x\right)dx$

$= \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5\pi}{2} + \left[\frac{3\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} - \left[\cos(2x)\right]_0^{\pi/2}\right) = \boxed{\frac{\pi(5\pi+8)}{4}}.$

<u>Obs:</u> Vi har använt $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

⑦ Låt $x_1 < x_2$ i intervallet $]a, b[$

<u>Medelvärdessatsen</u> för deriverbara funktioner ger att det finns en punkt c mellan x_1 och x_2 sådan att

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1).$$

Eftersom $f'(x) > 0$ i $]a, b[$, har vi $f'(c) > 0$. Alltså $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ och $f(x_2) - f(x_1) > 0$, dvs. $f(x_2) > f(x_1)$.

⑧ Låt $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{k \to 0} \frac{\ln(1+k)}{k} = 1.$$ Vi får

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Enligt definitionen är f deriverbar i x och $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.