MATEMATIK
Göteborgs Universitet
MS

28 augusti 2007, 8.30-13.30
Hjälpmedel: Miniräknare
Telefon: Christoffer Cromvik,
076 - 272 18 61.

# Tentamensskrivning i Analys 4p, LMA200

1. Bestäm konstanten $a$ så att

$$f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$$

har ett lokalt extremvärde då $x = 1$. Undersök därefter kurvan $y = f(x)$ med avseende på asymptoter, växande och konvexitet. Är $f(1)$ även ett globalt extremvärde? (3p)

2. Visa att likheten

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

gäller för alla $x > 0$. (3p)

3. Beräkna följande integraler:

a) $\displaystyle\int_0^1 3x^2(x^3+1)^4\,dx$ (1p)

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$ (1p)

c) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x \cdot \cos 2x\,dx$ (1p)

4. Låt ett område i första kvadranten som begränsas av $y$-axeln, kurvan $y = \sin 2x$ och dess tangent i punkten $(\frac{\pi}{2}, 0)$ rotera kring $x$-axeln. Bestäm volymen av den rotationskropp som fås. *Användbar formel:* $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$. (3p)

5. Beräkna gränsvärdena

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)}$, (1p)

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+x}\right)$. (1p)

c) Formulera de standardgränsvärden du använde i a). (1p)

Forts. →

6. Formulera differentialkalkylens medelvärdessats och använd denna för att härleda följande: Om $f$ är deriverbar med $f'(x) > 0$ på intervallet $(a, b)$ så följer att $f$ är strängt växande på $(a, b)$. (3p)

7. Använd derivatans definition för att härleda derivatan av $f(x) = 2^x$ för alla $x \in \mathbb{R}$. *Du behöver skriva om $2^x$ till basen e och använda ett standardgränsvärde, formulera även detta standardgränsvärde.* (3p)

8. Låt

$$f(x) = \int_0^{\arctan x} (1 + \tan^2 t)^2 \, dt \, .$$

Bestäm först $f'(x)$ och därefter $f(x)$ (*notera att* $f(0) = 0$). Bestäm slutligen

$$\int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 t)^2 \, dt \, . \qquad \text{(4p)}$$

För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng.

**På samtliga uppgifter skall alla beräkningar och motiveringar redovisas.**

Lycka till!
/MS