Matematik
Göteborgs universitet
iP

14 april 2009

Lösningar till tentamensskrivning i Analys LMA210 GU

1 (a) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(x-\sqrt{x^2-1}) = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\,(x^2-x^2+1)}{x+\sqrt{x^2-1}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \boxed{\tfrac{1}{2}}$.

(b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan x}{\pi-x} = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\tan(\pi-x)}{\pi-x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-\tan y}{y} = \boxed{-1}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = \boxed{3}$.

2 Funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ är definierad på $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Asymptoter: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow$ $y=x$ är sned asymptot när $x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right) = 0 \Rightarrow$ $y=x$ sned asymptot när $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow$ $x=1$ är lodrät asymptot

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \Rightarrow$ $x=-1$ är lodrät asymptot

Derivatan: $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1)-x^3\,2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.

$f'(x)=0 \iff x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\sqrt{3},\ x_3=-\sqrt{3}$ (stationära punkter).

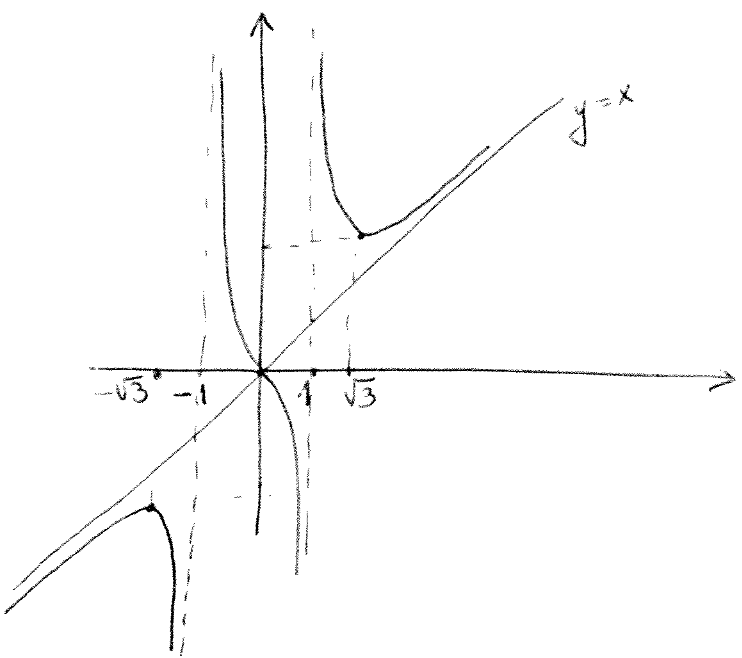
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

Lokala extrempunkter: $x=\pm\sqrt{3}$
Terrasspunkt: $x=0$.

Konvexitet: $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, $f''(x)=0 \iff x=0$

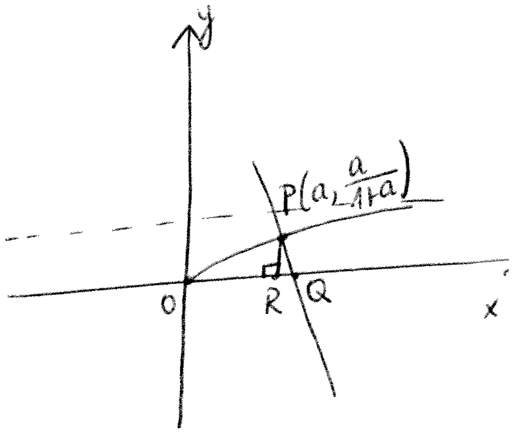
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		∩	‖	∪	0	∩	‖	∪	

Graf.



③

$$y' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$



Normalen genom P till kurvan har ekvationen

$$y - \frac{a}{1+a} = \frac{-1}{y'(a)}(x-a) \iff y - \frac{a}{1+a} = -(1+a)^2(x-a).$$

Skärningspunkten Q med x-axeln ges av:

$$-\frac{a}{1+a} = -(1+a)^2(x-a) \iff x = a + \frac{a}{(1+a)^3}$$

Triangeln PQR har arean:

$$A = \frac{1}{2}|PR|\cdot|RQ| = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{1+a}\left(a + \frac{a}{(1+a)^3} - a\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^4}$$

Låt $g(a) = \frac{a^2}{(1+a)^4}$.

$$g'(a) = \frac{2a(1-a)}{(1+a)^5}, \quad g'(a) = 0 \iff a = 0 \text{ eller } 1.$$

a	0		1		$+\infty$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	0

$a = 1$ är maxpunkt $\Rightarrow$ arean av triangeln PQR är maximalt när $\boxed{P(1, \frac{1}{2})}$.

I så fall är arean $\frac{1}{2}g(1) = \frac{1}{32}$.

④ Skärning mellan kurverna

$$\begin{cases} y = \frac{-4}{x^2+1} \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{x^2+1} = x^2 - 3 \iff x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \iff (x^2-1)^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

$$(x^2-3) - \left(-\frac{4}{x^2+1}\right) = \frac{(x^2-1)^2}{x^2+1} \geq 0 \text{ för alla reella } x.$$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - 3 + \frac{4}{x^2+1}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x + 4\arctan x\right]_{-1}^{1} = \boxed{-\frac{16}{3} + 2\pi}$$

(5) (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^3}{3} - \frac{(\ln 1)^3}{3} = \frac{1}{3}.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \left[\ln(e^x + e^{-x})\right]_{-1}^{1} = \ln(e+e^{-1}) - \ln(e^{-1}+e) = 0.$

(6) Låt $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) + \ln(1-x) + x^2$.

f deriverbar och $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1-x} + 2x = \dfrac{1-x-1-x+2x-2x^3}{1-x^2} =$

$= \dfrac{-2x^3}{1-x^2}.$

$f'(x) = 0 \iff x = 0.$

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Eftersom $f'(x) < 0$ för alla $x \in]0,1[$, får vi att f är strängt avtagande i intervallet $[0,1[$. Om $x > 0$, $f(x) < f(0) = 0$. Detta implicerar

$\ln(1+x) + \ln(1-x) + x^2 < 0 \iff$

$\ln(1+x) < -\ln(1-x) - x^2.$

(7) Sats Om funktionen f har lokalt extremvärde i en inre punkt x_0 i definitionsintervallet och om f är deriverbar i x_0 så är $f'(x_0) = 0$.

Bevis. Antag t.ex. att f har ett lokalt maximum i x_0. För alla tillräckligt små värden på $|h|$ är $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ om $h<0$ och $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ om $h>0$. Vi får:

$\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ och $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ som implicerar

$f'(x_0) \geq 0$ och $f'(x_0) \leq 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0.$

(8) Låt $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Enligt Analysens huvudsats är även S en primitiv till f. Vi får $S' = F' = f \Longrightarrow S(x) = F(x) + C$, för något konstant C.

Vi har $S(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$, $F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$

$S(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$