Matematik
Göteborgs Universitet
iP

Lösningar till tentamensskrivning i Analys

LMA 210 GU (14 okt 2008)

① (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin(3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \dfrac{3x}{\sin(3x)} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin 3x}$

$= \dfrac{2}{3}$ ty $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} = 1$ och $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin(3x)} = 1$ (standard gränsvärden).

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x+\ln x}{3\cdot 2^x - \ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{\ln x}{2^x}}{3-\frac{\ln x}{2^x}} = \dfrac{1}{3}$. (ty $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{2^x} = 0$)

② $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ är en udda funktion.

Asymptoter: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x(x^2-4)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-x^3+4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{x^2-4} = 0$.

Linjen $y = x$ är alltså en sned asymptot då $x \to +\infty$.

Analogt då $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ och $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-x) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \dfrac{2^3}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \dfrac{2^3}{0^+} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = \dfrac{-8}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = \dfrac{-8}{0^-} = +\infty$. Linjerna $x = 2$ och $x = -2$ är lodräta asymptoter

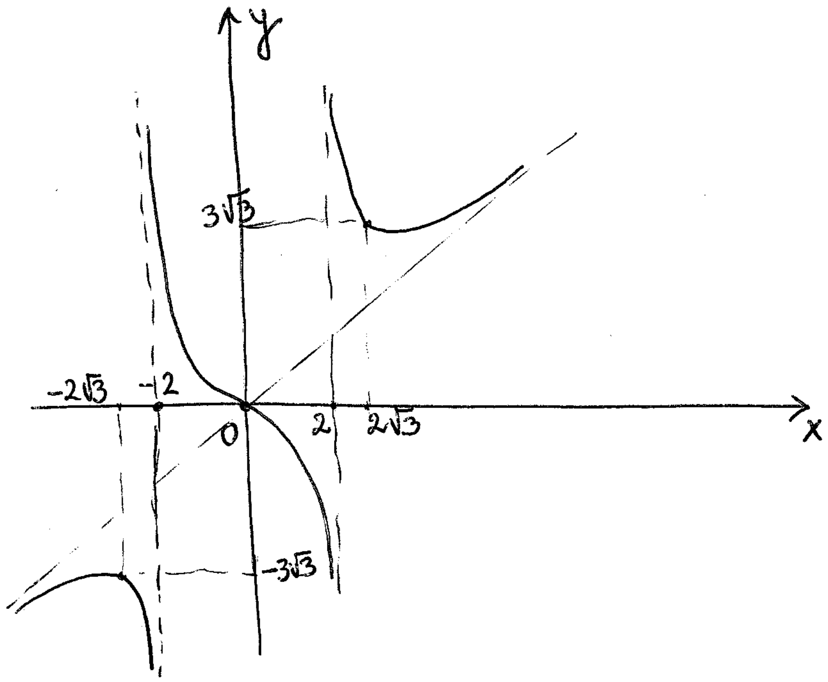
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Stationära punkter: $f'(x) = 0 \iff x^2(x^2-12) = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = \pm 2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$ lokal max	$\searrow$	$-\infty$ / $+\infty$	$\searrow$	0 terrasspkt	$\searrow$	$-\infty$ / $+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$ lokal min	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$
$f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$

Graf:



③. (a) Olikheten är ekvivalent med $\ln(1+4x) - \arctan(3x) > 0$.

Låt $f: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+4x) - \arctan(3x)$.

$$f'(x) = \frac{4}{1+4x} - \frac{3}{1+9x^2} = \frac{4+36x^2-3-12x}{(1+4x)(1+9x^2)} = \frac{36x^2-12x+1}{(1+4x)(1+9x^2)} = \frac{(6x-1)^2}{(1+4x)(1+9x^2)}$$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$ och $f'(x) = 0$ endast för $x = \frac{1}{6}$. Då gäller att f är strängt växande på $[0, +\infty[$. Detta implicerar $f(x) > f(0) = 0$ då $x > 0$. Olikheten är bevisad.

(b) Olikheten är ekvivalent med $\ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 0$.

Låt $f: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

f är deriverbar och $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{(x - 2\sqrt{x} + 1)}{2x\sqrt{x}} =$

$= -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) \leq 0$ för alla $x \geq 1$. Dessutom är $f'(x) = 0$ endast i punkten $x = 1$. Detta implicerar att f är strängt avtagande på $[1, +\infty[$. Alltså är $f(x) \leq f(1)$ om $x \geq 1$.

Men $f(1) = 0$. Vi får $f(x) \leq 0$ för $x \geq 1$. Olikheten är bevisad. ∎

④ (a) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln|x^3+1|\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$

(b) $\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^{2x}}\,dx = \int_0^1 e^{-x}+e^{-2x}\,dx = \left[-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 =$

$= -e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}+1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}.$

(c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \left[\ln|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right) = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3.$

⑤ Skärningspunkt mellan kurvorna $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\geq 0$:

$\frac{2}{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; låt $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow \frac{2}{t^2}=\frac{1}{t} \Rightarrow t^2=2t \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} t=2 \Rightarrow$

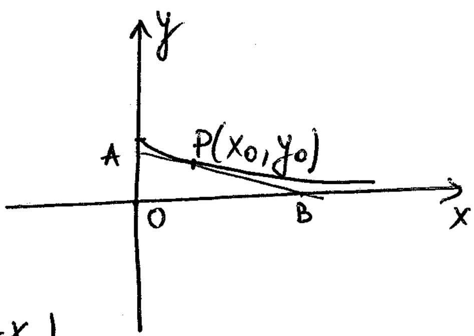
$1+x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Eftersom $x>0 \Rightarrow x=\sqrt{3} \Rightarrow$ skärningspkt $\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$.

Om $0\leq x\leq\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{1+x^2}\leq 2 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\geq 0 \Rightarrow \frac{2}{1+x^2}\geq\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Area $= \int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{2}{1+x^2}\,dx - \int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$

$= \left[2\arctan x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$

⑥ Tangenten i en punkt $P(x_0, e^{-x_0})$ har ekvationen:



$y-e^{-x_0} = -e^{-x_0}(x-x_0)$

Skärning med y-axeln: $x=0 \Rightarrow y-e^{-x_0}=e^{-x_0}\cdot x_0$

$\Leftrightarrow y=e^{-x_0}(1+x_0) \Rightarrow A\left(0, e^{-x_0}(1+x_0)\right).$

Skärning med x-axeln: $y=0 \Rightarrow -e^{-x_0}=-e^{-x_0}(x-x_0)$

$\Leftrightarrow x-x_0=1 \Rightarrow x=x_0+1 \Rightarrow B(x_0+1, 0)$

Area$(\Delta OAB) = \frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB| = \frac{(x_0+1)^2e^{-x_0}}{2}.$

Låt $f(x)=\frac{1}{2}(1+x)^2e^{-x}$, $x\geq 0$.

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(2(1+x)e^{-x}-(1+x)^2e^{-x}\right)=\frac{1}{2}(1+x)(1-x)e^{-x}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

Arean är maximalt $\frac{2}{e}$ för $x=1$.

7 **Sats.** Låt f och g vara deriverbara funktioner. Då är fg också deriverbar och $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Bevis. Vi skriver differenskvoten för fg som

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

g deriverbar $\Rightarrow$ g kontinuerlig $\Rightarrow$ $g(x+h) \to g(x)$ då $h \to 0$

f deriverbar $\Rightarrow$ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x)$ då $h \to 0$

Analogt, $\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \to g'(x)$ då $h \to 0$.

Därför följer att $\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ då $h \to 0$. Satsen är bevisad.

8 **Integralkalkylens medelvärdessats**

Om funktionen f är kontinuerlig i $[a,b]$ så finns en punkt $a \le \xi \le b$ sådan att $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

Analysens huvudsats

Om funktionen f är kontinuerlig i $[a,b]$ så är $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $a \le x \le b$, en primitiv funktion till f.

Bevis. $$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Enligt integralkalkylens medelvärdessats, finns en punkt ξ_h i $[x, x+h]$ sådan att $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)(x+h-x) = f(\xi_h) \cdot h$.

Vi får att $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot f(\xi_h) \cdot h = f(\xi_h)$.

Då $h \to 0$ går ξ_h mot x. Eftersom f kontinuerlig $\Rightarrow$ $f(\xi_h) \to f(x)$, då $h \to 0$. Alltså är $\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$.

Enligt def är S deriverbar och $S'(x) = f(x)$ för $a \le x \le b$.