Kortfattade lösningar till

Tentamen LMA 210, Analys 15/1 -10.

1 a) Vi har $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Så $\int \frac{x+1}{x-1}\,dx = x + 2\ln|x-1|$.

b) Kedjeregeln ger $De^{x^2} = 2xe^{x^2}$ så $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$.

c) Vi har $D\,x\ln x = \ln x + x\,\frac{1}{x} = \ln x + 1$

Så $\int \ln x\,dx = \int (\ln x + 1) - 1\,dx = x\ln x - x$.

2 Vi har $f'(x) = y' = \frac{2x(x+1)^2 - 2(x+1)x^2}{(x+1)^4}$

$= \frac{1}{(x+1)^3}\left(2x(x+1) - 2x^2\right) = \frac{2x}{(x+1)^3}$.

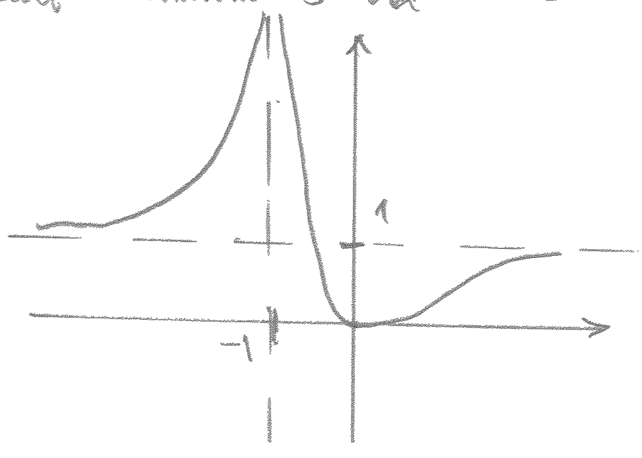
Så

x		-1		0	
y'	$+\ +$	ej def.	$-\ -$	0	$+\ +$
y	$\nearrow$	ej def.	$\searrow$	0	$\nearrow$
				min	

Dessutom gäller $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

Så $x = -1$ är en lodrät och $y = 1$ en vågrät asymptot.

y har ett globalt minimum 0 där $x = 0$.



3) a) Båda täljaren och nämnaren har nollstället $x=1$ så faktorsatsen ger

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} \to \frac{3}{-1} = -3, \quad x \to 1$$

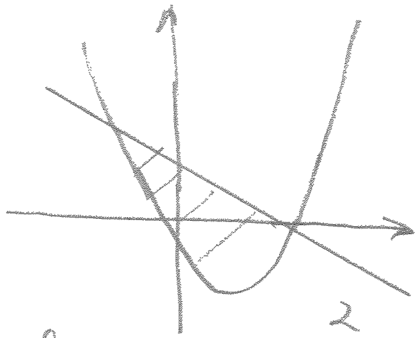
b) Vi har

$$\frac{x^2 \cos 1/x + x}{x \sin 1/x + x^2} = \frac{x^2\left(\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)} = \frac{\cos 1/x + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}\sin x} \to \frac{1+0}{1+0} = 1, \quad x \to$$

c) $$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x^2+x-x^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} \to \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}, \quad x \to +\infty$$

---

4) 

Skärningspunkten hos $y = x^2 - 2x - 1$ och $y = 1 - x$ fås ur $x^2 - 2x - 1 = 1 - x$, $x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Så $$A = \int_{-1}^{2} (1-x) - (x^2 - 2x - 1)\, dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2 \, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 4{,}5.$$

---

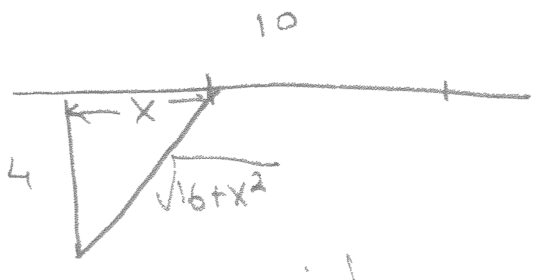
5 Det gäller att visa att $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$ då $x > 0$. Men $f(0) = \ln 1 = 0$ och

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{1 + (x-1)(x+1)}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} > 0$$

om $x > 0$. Så f är strängt växande och

$$f(x) > f(0) = 0 \quad \text{då } x > 0.$$

6)



Med x som i figuren så vi att kostnaden blir

$$K(x) = 50.000\sqrt{16+x^2} + 40.000(10-x) = 10.000(5\sqrt{16+x^2} + 4(10-x))$$

Så

$$K'(x) = 10.000\left(5\frac{x}{\sqrt{16+x^2}} - 4\right) = 10.000\left(\frac{5x - 4\sqrt{16+x^2}}{\sqrt{16+x^2}}\right) = 0$$

då $5x = 4\sqrt{16+x^2}$. Kvadrering ger $25x^2 = 16(16+x^2)$,

$9x^2 = 16^2$, $x^2 = \frac{16^2}{3^2}$ och $x = \overset{+}{(-)}\frac{16}{3}$.

Vidare är $K'(x) < 0$ om $x < 16/3$ och $K'(x) > 0$ om $x > \frac{16}{3}$

så $x = 16/3$ ger minimal kostnad.

Svar: Ledningen skall dras hit en punkt $10 - 16/3$ från raffinaderiet.

---

7) & 8) Se kurslitteraturen