Kortfattade lösningar till Tentamen LMA210, Analys, 19/10-09

1a, Vi har $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{x+2-2}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2}$.

Så $\int \frac{x}{x+2}\,dx = x - 2\ln(x+2)$

1b) Eftersom $De^{\sin x} = e^{\sin x} D\sin x = \cos x\, e^{\sin x}$

så $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx = e^{\sin x}$.

1c) $D\, x\sin x = x\cos x + \sin x$ och $D\cos x = -\sin x$

Så $\int x\cos x\, dx = \int (x\cos x + \sin x) - \sin x\, dx$

$= x\sin x + \cos x$.

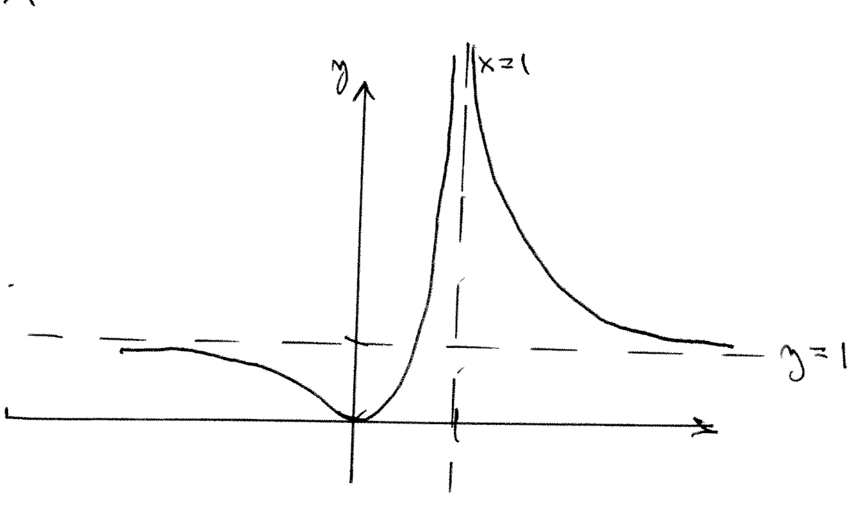
---

2. Vi har $y' = \dfrac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)x^2}{(x-1)^4} = \ldots = -\dfrac{2x}{(x-1)^3}$

x		0		1	
y'	$- \; -$	0	$+ \; +$	ej def	$- \; -$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	ej def	$\searrow$
		lok. min			

Dessutom $\lim_{x\to 1} y(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 1$

Så



$y(0) = 0$ är ett globalt minimum.

3 a) $\dfrac{(e^x-1)\sin 3x}{x^2} = 3\,\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{e^x-1}{x} \to 3\cdot 1\cdot 1 = 3,\ x\to 0$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1} \to 3,\ x\to 2$

c) Vi har att $\cos\frac{1}{x} \to 1$ då $x\to\infty$ så vi bör ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\cos\tfrac{1}{x}\,dx = \int_n^{n+1} 1\,dx = 1 \quad \circledast$$

Ett bevis av $\circledast$: $\cos\frac{1}{x}$ är växande så

$$0 \le 1 - \int_n^{n+1}\cos\tfrac{1}{x}\,dx = \int_n^{n+1}\left(1-\cos\tfrac{1}{x}\right)dx \le \int_n^{n+1}\left(1-\cos\tfrac{1}{n}\right)dx$$

$= 1-\cos\frac{1}{n} \to 0,\ n\to\infty$. Så $\circledast$ följer med instängningsregeln.

---

4) <u>Lösn. 1.</u> Låt $f(x) = 1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$.

Då är $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) > 0$ om $x>0$.

Så $f(x)$ är strängt växande. Dessutom är $f(0)=0$ så vi får $f(x)>0,\ x>0$.

<u>Enklare lösn.</u> Båda leden är positiva. Så olikheten är ekvivalent med $\left(\sqrt{x+1}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{2}x\right)^2$.

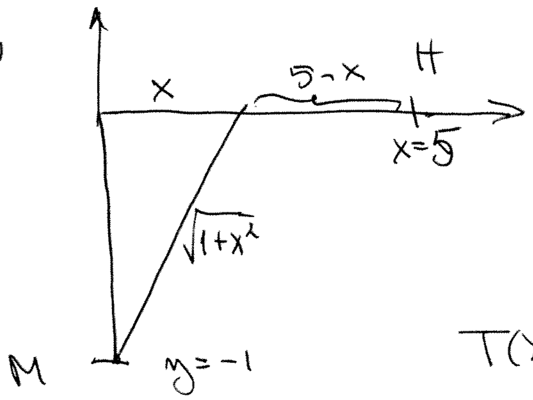
Men $\left(\sqrt{1+x}\right)^2 = 1+x < 1+x+\frac{x^2}{4} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$.

---

5. Skivformeln ger

$$V = \pi\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \pi\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

6)



Med x som i figuren och med $T(x)$ som tiden gäller

$$T(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{6} + \frac{5-x}{10}$$

Så $$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{10} = \frac{5x - 3\sqrt{1+x^2}}{30\sqrt{1+x^2}}$$

och $T'(x)=0$ ger

$$5x = 3\sqrt{1+x^2}, \quad 25x^2 = 9(1+x^2)$$

$$16x^2 = 9 \quad x^2 = \frac{9}{16} \quad \text{och} \quad x = (\pm)\frac{3}{4}$$

Man inser (lätt?) att det ger ett globalt minimum. Den minimala tiden blir

$$T(3/4) = \frac{\sqrt{1+9/16}}{6} + \frac{17/4}{10} = \frac{5}{24} + \frac{17}{40} = \frac{76}{120} = \frac{38}{60} \text{ tim}$$

dvs. 38 minuter.

---

7) & 8) Se kurslitteraturen