

Tentamensskrivning i LMA210,
Matematik för lärare 2, Analys, 6 poäng
28 augusti 2010, 8³⁰ – 13³⁰

1. Bestäm följande gränsvärden.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2 \cos x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 + x - 1}, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} e^{1/x} dx$$

2. Bestäm en primitiv funktion till följande funktioner.

$$(a) \frac{x-1}{x+1}, \quad (b) \frac{x}{1+x^2}, \quad (c) xe^{-x}$$

Ledning till (c). Vad är derivatan av xe^{-x} ?

3. Undersök extremvärden och asymptoter till kurvan

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

Rita kurvan.

4. Visa att $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ för alla reella x .
5. (a) Beräkna normalen till kurvan $y = x^2$ genom punkten $(-1, 1)$.
(b) Bestäm arean av det begränsade område som begränsas av kurvan $y = x^2$ och denna normal.
6. En förnöjd örn svävar rakt fram 300 meter ovanför markytan med konstant fart 10 m/s. En fågelskådare på marken följer intresserat örnen med blicken. Hur fort ändrar sig avståndet mellan fågelskådaren och örnen när den befinner sig (fågelvägen) 500 meter från fågelskådaren?
7. Formulera och bevisa en räkneregel för $\ln ab$.
8. (a) Formulera medelvärdessatsen.
(b) Visa att om $f(x)$ är deriverbar med $f'(x) = 0$ för alla $a < x < b$ så är $f(x)$ konstant på intervallet (a, b) .