LMA210, Analys, Tentamen 12/1-10

Kortfattade lösningar

---

1 a) Eftersom $D\cos x^2 = -2x\sin x^2$,

$$\int x\sin x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2$$

b) Eftersom $De^{1/x} = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$, så

$$\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx = -e^{1/x}$$

c) Vi har $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$. Så

$$Dx^x = e^{x\ln x}D(x\ln x) = x^x(\ln x + 1)$$

---

2 a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \begin{pmatrix} y=\sin x \\ x\to 0 \Rightarrow y\to 0\end{pmatrix} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

b) $$x(\sqrt{x^2+1}-x) = x\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1} \longrightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ då } x\to\infty.$$

c) Integralkalkylens medelvärdessats ger

$$\int_x^{x+2}\cos 1/t\,dt = \cos 1/\xi\int_x^{x+2}dt = 2\cos 1/\xi$$

där $x\le\xi\le x+2$. När $x\to\infty$ så $\xi\to\infty$, och alltså $2\cos 1/\xi \to 2\cos 0 = 2$. Så det sökta gränsvärdet är 2.

3) Vi har $\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\infty} =$

$0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

4.) Låt $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$. Då $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^4} =$

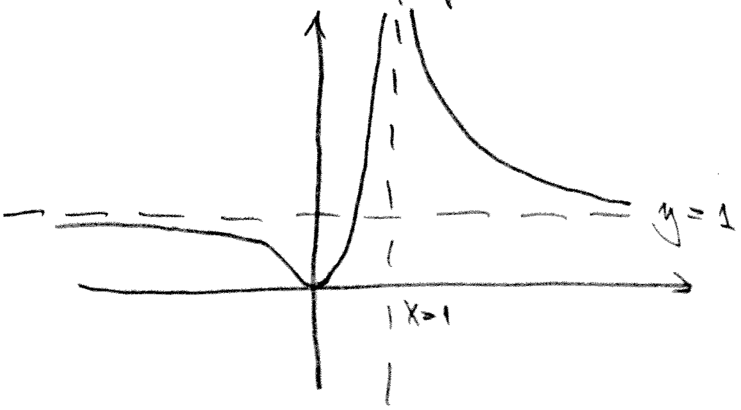
$$= \frac{2}{(x-1)^3}\left(x^2-1 - (x^2+2x+1)\right) = -\frac{4}{(x-1)^3}(x+1)$$

Vi får

x		-1		1	
$f'(x)$	$-\ -$	0	$+\ +$	ej def	$-\ -$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	ej def	$\searrow$
		lok. max.			

Dessutom $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, så

$y=1$ och $x=1$ är asymptoter.



5. Integralkalkylens huvudsats ger

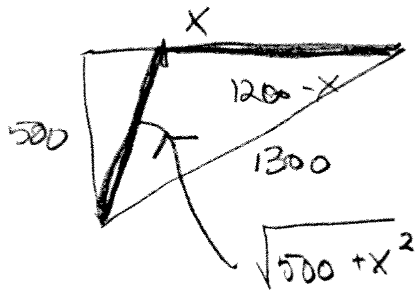
$$f'(x) = \left(2 + \sin x^3\right)(x-1).$$

Nu är $2 + \sin x^3 \geq 2 - 1 = 1 > 0$ så

x	0		1	
$f'(x)$	$-$	$-\ -$	0	$+\ +\ +$
$f(x)$		$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$

Teckentabellen visar att $f(x)$ antar sitt minsta värde då $x = 1$

6) Låt x vara som i figuren.



I skogen har orienteraren hastigheten $\frac{2000}{15}$ m/min på vägen $\frac{2000}{9}$ m/min. Eftersom $v = \frac{s}{t}$ eller $t = \frac{s}{v}$ blir tiden längs "den tjocka" polygonen ovan

$$t(x) = \frac{1}{2000}\left(15\sqrt{x^2+500^2} + 9(1200-x)\right).$$

Så

$$t'(x) = \frac{1}{2000}\left(\frac{15x}{\sqrt{x^2+500^2}} - 9\right) = 0$$

då $15x = 9\sqrt{x^2+500^2}$, $5x = 3\sqrt{x^2+500^2}$,

$25x^2 = 9x^2 + (9\cdot 500)^2$ $16x^2 = (9\cdot 500)^2$ om

$x = {}^{+}_{(-)} \frac{3\cdot 500}{4} = 375$, som ger minimum.

Så $t_{min} = t(375) = \frac{1}{2000}\left(15\sqrt{500^2(1+\frac{9}{16})} + 9\cdot 825\right)$

$= \frac{1}{2000}\left(15\cdot 500 \cdot \frac{5}{4} + 9\cdot 825\right) = \frac{1}{8000}\left(15\cdot 500\cdot 5 + 36\cdot 825\right)$

$= \frac{67200}{80000} = \frac{672}{80} = 8{,}4$ min (Puh!)

Så $t_{min} = 8{,}4$ min eller $t_{min} = 8$ min och 24 sek.

7) & 8) Se kursliteraturen