Tentamen, LMA210, Analys 15/10-10

Kortfattade lösningar

1.a) Eftersom $D\sin x = \cos x$ ger kedjeregeln att $D(\sin x)^2 = 2\sin x\cos x$ och alltså
$$\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x)^2.$$

b) Kedjeregeln ger $De^{x^2} = e^{x^2}\cdot 2x$ så
$$\int 3xe^{x^2}dx = \frac{3}{2}e^{x^2}.$$

c) Vi har $D\,x\ln x = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$

Så $\int \ln x\,dx = \int(\ln x+1)-1\,dx = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$

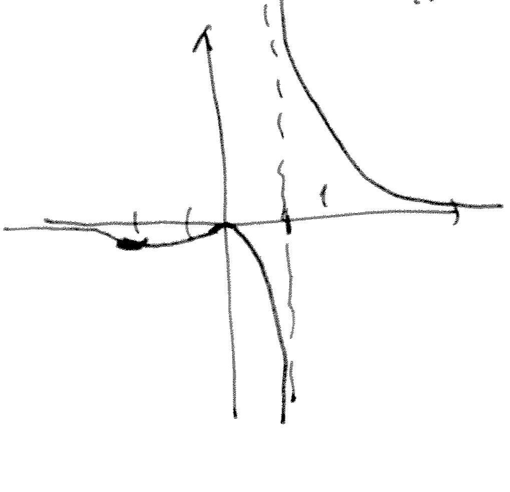
---

2. Låt $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$. Då är $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)^3 - 3(x-1)^2x^2}{(x-1)^6} =$

$\ldots = -\dfrac{x(x+2)}{(x-1)^4}$. Så vi får

x		-2		0		1	
$f'(x)$	$-\,-$	0	$+\,+$	0	$-\,-$	ej def	$-\,-$
$f(x)$	$\searrow$	$4/9$	$\nearrow$		$\searrow$	ej def	$\searrow$
		min		max			

Dessutom är $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, ~~$\lim f(x)$~~ $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$



$(-2, 4/9)$ är ett lokalt minimum

$(0,0)$ ett lokalt maximum.

~~$x=0$ asymptot~~ $x=1$ och $y=0$ är asymptoter.

3a) Vi har $\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x} = e^x \dfrac{e^x-1}{\sin 3x} = \dfrac{e^x}{3}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}$

$\longrightarrow \dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{1}{3}$, $x\to 0$.

b) Vi har $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{x+2}{x+3} \to \dfrac{1}{2}$, $x\to -1$.

c) Integralkalkylens medelvärdessats ger att

$$\int_n^{n+1} e^{1/x}\,dx = \int_n^{n+1} e^{1/c_n}\,dx = e^{1/c_n} \quad \text{där} \quad n\le c_n\le n+1.$$

Så eftersom $c_n\to\infty$ då $n\to\infty$ och $\lim_{x\to\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ får vi

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} e^{1/x}\,dx = 1$$

---

4) Vi har $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\ln x - \ln(x+1)\Big]_1^\infty =$

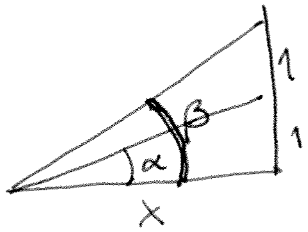
$= \Big[\ln\dfrac{x}{x+1}\Big]_1^\infty = \ln 1 - \ln\dfrac{1}{2} = \ln 2$.

---

5) Låt $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\ln t}\,dt$. Integralkalkylens huvudsats ger att $F'(x) = \dfrac{1}{\ln x}$. Så $g'(x) = DF(e^x) = F'(e^x)De^x$

$= \dfrac{e^x}{\ln e^x} = \dfrac{e^x}{x}$.

6.



Med figurens beteckningar har vi $\tan\beta = \frac{2}{x}$, $\tan\alpha = \frac{1}{x}$

eller $\beta = \arctan\frac{2}{x}$ och $\alpha = \arctan\frac{1}{x}$

Så $\varphi(x) = \varphi = \beta - \alpha = \arctan\frac{2}{x} - \arctan\frac{1}{x}$.

Vi får $\varphi'(x) = \frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+4} = \frac{x^2+4-2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{5-x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Så $\varphi'(x)=0$ ger $x^2=5$ eller $x = (\pm)\sqrt{5}$.

Det är klart att detta ger ~~φ maximalt~~ att φ är maximal. ($\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ & $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$)

Alltså skall Per stå $\sqrt{2}$ m från väggen.

7) & 8) Se kurslitteraturen.