1 a) Vi har $D\sin x^3 = \cos x^3 \cdot Dx^3 = 3x^2\cos x^3$

Så $\int x^2 \cos x^3 dx = \frac{1}{3}\sin x^3$

b) Vi har $D\arctan 2x = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot D(2x) = \frac{2}{1+4x^2}$

Så $\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\arctan 2x$

c) $\frac{(1+x)^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} = 1+\frac{2x}{1+x^2}$

Så $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx = \int(1+\frac{2x}{1+x^2})dx = x+\ln(1+x^2)$

---

2 a) $\frac{\sin x^2}{\sin^2 x} = \frac{\sin x^2}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \to 1\cdot 1^2 = 1,\ x\to 0$

b) Båda täljare och nämnare är 0 då $x\to 2$.

Vi har $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$ och $10-3x-x^2 =$

$= -(x-2)(x+5)$. Alltså gäller $\frac{x^2-x-2}{10-3x-x^2} = -\frac{x+1}{x+5} \to -\frac{3}{6}$

$= -\frac{1}{2},\ x\to 2$

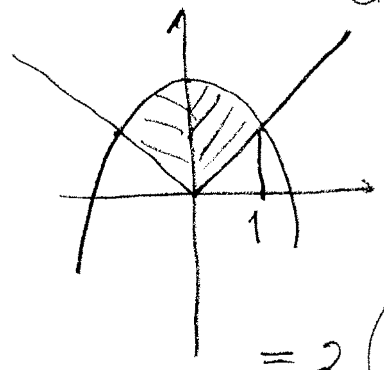
c) Förlängning med konjugatuttrycket ger

$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}$

$\to \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1,\ x\to\infty$

LMA 210, Analys, 27 augusti 2011

3.



Om $x>0$ ger $|x| = 2-x^2$, $x^2+x-2=0$

så $x=1$

Symmetri ger att

$$A = 2\int_0^1 (2-x^2-x)\,dx$$

$$= 2\left(\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right) = 2\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3}$$

4.)

$$y = f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}, \quad y' = \frac{2(x-2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x-2)^2}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x-2)\big((x+1)-(x-2)\big)}{(x+1)^3} = 6\,\frac{x-2}{(x+1)^3}$$

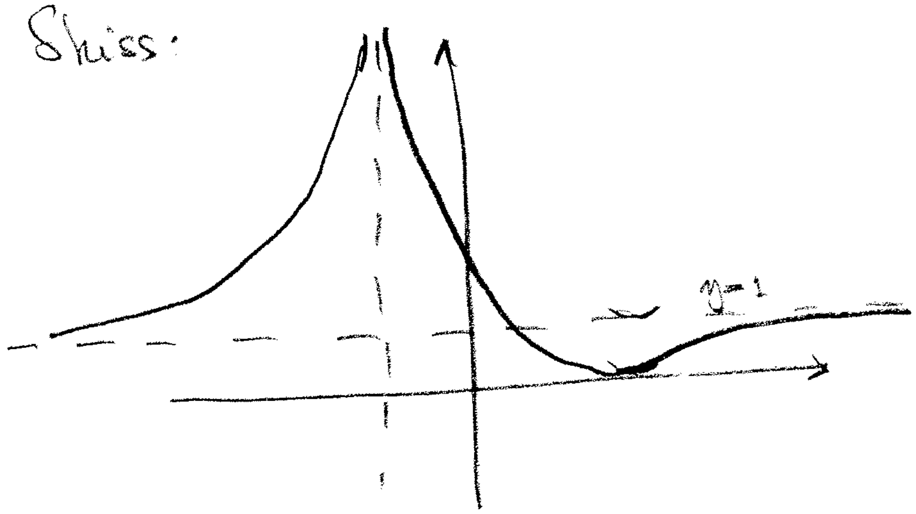
Vi får följande teckentabell

x		-1		2	
y'	$+\ +$	ej def	$-\ -\ -$	0	$+\ +$
y	$\nearrow$	ej def	$\searrow$	0	$\nearrow$

max

Dessutom är $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ och $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$.

Skiss:



5. Låt radien vara r och höjden h cm

5 deciliter är 500 cm³. Så vi har

$$\pi r^2 h = 500 \text{ eller } h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Burken har arean

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r h$$
$$= \pi r^2 + \frac{1000}{r}.$$

Vi får $A'(r) = 2\pi r - \frac{1000}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 1000}{r^2}$

Så om $r_0 > 0$ uppfyller $2\pi r^3 - 1000 = 0$, dvs $r_0^3 = \frac{500}{\pi}$,

är $A'(r) < 0$ a $r < r_0$ och $A'(r) > 0$ a $r > r_0$

Så $A(r)$ är minimal då $r = r_0$.

Vi får $h_0 = \frac{500}{\pi r_0^2} = \frac{500 r_0}{\pi r_0^3} = \frac{500 r_0}{500} = r_0$,

så kvoten är 1.

---

6. Integralkalkylens fundamentalsats ger

$a'(x) = e^{x^2}$. Vidare är $b(x) = a(x^2)$, så

$b'(x) = a'(x^2) \cdot 2x = 2x e^{x^4}$.

Till sist så är $c(x) = b(x) - a(x)$, och

$c'(x) = b'(x) - a'(x) = 2xe^{x^4} - e^{x^2}$.

---

7. & 8.) Se kurslitteraturen