MATEMATIK
Göteborgs universitet
TW

5 oktober 2010, 8.30-12.30
Inga hjälpmedel
Telefon: Adam Andersson, 0703 - 08 83 04

Tentamensskrivning i LMA210
Linjär algebra

Var noga med motiveringarna!

1. Låt $\mathbf{u} = (1\ \ 3\ \ 2)^t$, $\mathbf{v} = (-3\ \ 1\ \ -7)^t$ och $\mathbf{w} = (-2\ \ -1\ \ 1)^t$. Beräkna volymen av den parallellepiped som $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ spänner upp. Bildar $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ett höger- eller vänstersystem?

2. (a) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen $x - 2y - 3z = -7$, $3x - y + z = 4$ och $2x + y + 4z = 11$.
   (b) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen $x - 2y - 3z = -7$, $3x - y + z = 4$ och $x + y + 4z = 3$.
   (c) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen $x - 2y - 3z = -7$, $3x - y + z = 4$ och $2x + y + 4z = 3$.
   (d) Beskriv geometrin i de tre fallen. (4p)

3. Visa att vektorerna $(2\ \ 3\ \ 1)^t$, $(1\ \ 6\ \ 8)^t$ och $(1\ \ 3\ \ 3)^t$ är linjärt beroende och ange en icke-trivial linjärkombination av dem som är $\mathbf{0}$.

4. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5. För en godtycklig vektor $\mathbf{v} = (x\ \ y\ \ z)^t$, bestäm dess projektion i planet $x + y + z = 0$, dvs. den vektor $\mathbf{w}$ som är vinkelrät mot planets normalvektor och som är sådan att $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ är parallell med planets normalvektor.

6. Vi vet att matrisen för spegling i linjen med riktningsvinkel α är $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ och att matrisen för rotation vinkeln θ är $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
   (a) Visa att sammansättningen av en rotation och en spegling, $S_\alpha R_\theta$, är en spegling och bestäm riktningsvinkeln för speglingslinjen.
   (b) Samma uppgift för $R_\theta S_\alpha$.
   (c) När är dessa båda lika? (4p)

Varje uppgift utom nr. 2 och 6 ger max 3 poäng.
För godkänt krävs 10 poäng, för väl godkänt 15 poäng av 20.

Tentan beräknas vara färdigrättad tisdagen den 19 oktober kl 10, varefter resultat kan fås på tel. 772 3500. Tentor kan hämtas på MV:s expedition varje vardag 8.30-13.00.

LMA210 Linjär algebra 5 okt 2010

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 55$

③ ② (-1)

så volymen är 55 och $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bildar ett högersystem eftersom $\det(\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}) > 0$.

2, a) $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right)$ (-3) (-2) $\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \end{array}\right)$ (-1) (2/5) (1/5) $\sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Lösn. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

b) $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$ (-3) (-1) $\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 7 & 10 \end{array}\right)$ (-3/5) (2/5) (1/5) $\sim$

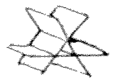
$\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$ (-2) (-1) $\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$ Lösn. $(x, y, z) = (8, 15, -5)$

c) $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 5 & 10 & 17 \end{array}\right)$ (-1) $\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$

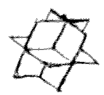
Sista raden svarar mot ekv. $0 = -8$, så lösning saknas.

d) I a) har planen en gemensam linje – deras normalvektorer är alla ortogonala mot $(-1\ -2\ 1)^t$ och är alltså linjärt beroende.

I c) är det tredje planet parallellförflyttat så planen skär varandra parvis längs linjer med riktningsvektor $(-1\ -2\ 1)^t$ men har ingen gemensam punkt.



I b) har planen exakt en gemensam punkt, vilket sker precis när deras normalvektorer är linjärt oberoende.



3. $x\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\6\\8\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y+z=0\\3x+6y+3z=0\\x+8y+3z=0\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\3&6&3\\1&8&3\end{pmatrix} \begin{matrix}(-3) & (-2)\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}0&-15&-5\\0&-18&-6\\1&8&3\end{pmatrix} \begin{matrix}(-5/6) & (1/2) & (-1/6)\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

så lösning $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-3t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$; alltså $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\6\\8\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}=\vec{0}$.

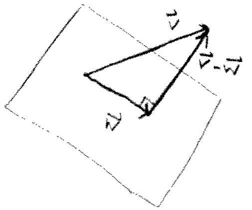
4. $$\begin{pmatrix}2&0&6&1&0&0\\1&1&6&0&1&0\\8&3&0&0&0&1\end{pmatrix}(-1) \sim \begin{pmatrix}2&0&6&1&0&0\\-1&1&0&-1&1&0\\8&3&0&0&0&1\end{pmatrix}(-3) \sim \begin{pmatrix}2&0&6&1&0&0\\-1&1&0&-1&1&0\\11&0&0&3&-3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 11\\ \cdot 11\\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}22&0&66&11&0&0\\-11&11&0&-11&11&0\\11&0&0&3&-3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}(1) & (-2)\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}0&0&66&5&6&-2\\0&11&0&-8&8&1\\11&0&0&3&-3&1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 6\\ \cdot 6\end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}66&0&0&18&-18&6\\0&66&0&-48&48&6\\0&0&66&5&6&-2\end{pmatrix}$$ så inversen är $\frac{1}{66}\begin{pmatrix}18&-18&6\\-48&48&6\\5&6&-2\end{pmatrix}$

Anm. Radoperationerna togs i ovanlig ordning för att dra fördel av nollorna i givna matrisen.

5.



Planet $x+y+z=0$ har enhetsnormalvektor $\vec{n}=\frac{(1\ 1\ 1)^t}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

och $\vec{v}-\vec{w}$ är $\vec{v}$:s projektion på $\vec{n}$,

alltså $\vec{v}-\vec{w}=(\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=$

$=\frac{x+y+z}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Så $\vec{w}=\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{x+y+z}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Man kan också använda att projektionen på $\vec{n}$ ges av matrisen $\vec{n}\vec{n}^t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ så projektionen till planet ges av $I-\vec{n}\vec{n}^t$ vilket ger matrisen ovan.

6. a) $$\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha\cos\theta+\sin 2\alpha\sin\theta & -\cos 2\alpha\sin\theta+\sin 2\alpha\cos\theta\\ \sin 2\alpha\cos\theta-\cos 2\alpha\sin\theta & -\sin 2\alpha\sin\theta-\cos 2\alpha\cos\theta\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(2\alpha-\theta) & \sin(2\alpha-\theta)\\ \sin(2\alpha-\theta) & -\cos(2\alpha-\theta)\end{pmatrix}=S_{\alpha-\frac{\theta}{2}}$$

b) $$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha\cos\theta-\sin 2\alpha\sin\theta & \sin 2\alpha\cos\theta+\cos 2\alpha\sin\theta\\ \cos 2\alpha\sin\theta+\sin 2\alpha\cos\theta & \sin 2\alpha\sin\theta-\cos 2\alpha\cos\theta\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(2\alpha+\theta) & \sin(2\alpha+\theta)\\ \sin(2\alpha+\theta) & -\cos(2\alpha+\theta)\end{pmatrix}=S_{\alpha+\frac{\theta}{2}}$$

c) Lika $\Leftrightarrow 2\alpha+\theta=2\alpha-\theta+n\cdot 2\pi \Leftrightarrow \theta=n\cdot\pi$, dvs. gör man rotation ett halvt varv spelar det ingen roll om man gör det före eller efter en godtycklig spegling.

En annan tolkning av c) är att om man vill få samma resultat genom rotation efter spegling som före så skall man rotera lika mycket men åt motsatt håll, vilket väl också är geometriskt självklart.

Alt. Lika $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2\alpha\sin\theta=0\\ \cos 2\alpha\sin\theta=0\end{cases} \Leftrightarrow \sin\theta=0 \Leftrightarrow \theta=n\cdot\pi$.