

Föreläsning 1

Inledande sannolikhets teori (kap 4)

Kan sägas ha börjat 1600-tal med analys av spel:
Cardano, Fermat, Pascal

Frågeställningar:

Hur stor är sannolikheten att:

- man slår tre sexor i rad med en tärning?
- att två slantsinglingar ger krona, klare?

- Vilka saker kan hända?

- Vad är sannolikheten för dem? (hur ska "sannolikheter" tolkas?)

~

Grundtes: vi (eller Moder Natur) genomför ett

Slumpmässigt försök

(eller experiment); t.ex kastar en tärning, får 1, 2, 3, 4, 5, eller 6

Def. Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas ett utfall (på förhand okänt, bestäms av Fru Fortuna/Tyche)

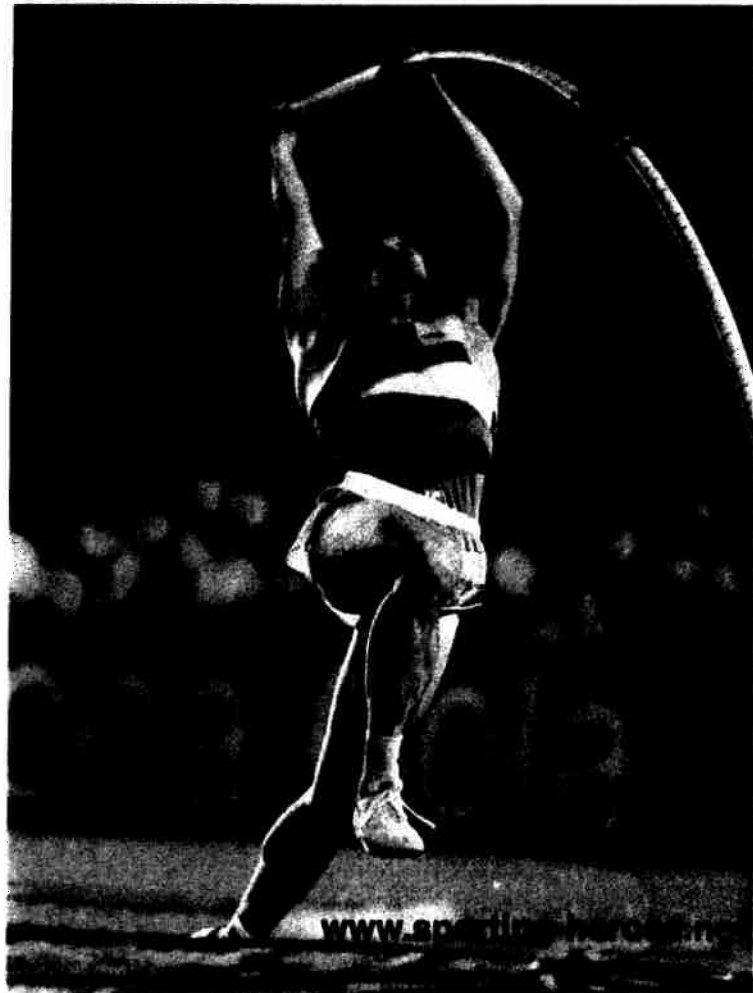
Def. Mängden av alla utfall kallas utfallsrum, betecknas Ω .

Ex 1. Vi singlar slant, får klave.
 $\Omega = \{\text{krona, klave}\}$

Ex 2. Vi mäter längden på en slumpvis vald person
 och får svaret 185 cm
 $\Omega = (0, \infty)? \quad \Omega = (50, 250)?$

Ex 3. Vi kastar två tärningar.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\} \text{ (36 utfall)}$$



Slumpmässigt försök ?

Ex 4. Startbopp, lyckas med sannolikhet p .

Många förutbestämda faktorer; men finns
chans att både lyckas och misslyckas

→ Slump är en etikett vi sätter på skeenden vars utfall är okänt för oss.

Def. En mängd utfall kallas en händelse, betecknas t.ex. A, B

Ex. vi kastar en tärning; utfallsrummet är $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Låt $A = \{\text{siffran} \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6\}$.

Vad är sannolikheten för en händelse?

→ Klassisk sannolikhetsdefinition

Sannolikheten för alla utfall är lika stor och slk för en händelse A är

$$P(A) = \frac{\text{antal utfall i } A}{\text{totalt antal utfall}}$$

har då antagit att tärningen, myntet är symmetriskt
eller rättvist.

→ vill generalisera. ▽

Kolmogorovs axiomsystem

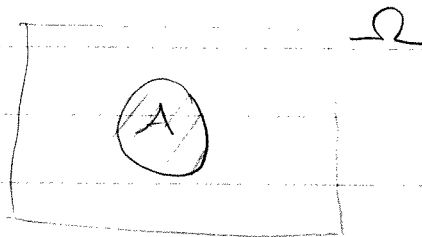
Låt Ω vara utfallsrum. En sannolikhet är en funktion P som för varje händelse A ger ett tal $P(A)$ s.a.

- $0 \leq P(A) \leq 1$ för alla $A \subseteq \Omega$.
- $P(\Omega) = 1$
- $A \cap B = \emptyset$ (disjunkta) $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

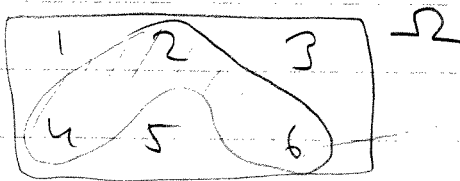
Kan göra mängdteoretiska operationer med händelser;

$\cup, \cap, \setminus, ^c$

illustreras med Venndiagram



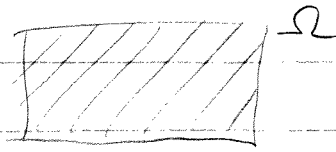
ex.



$$A = \{2, 4, 6\}.$$

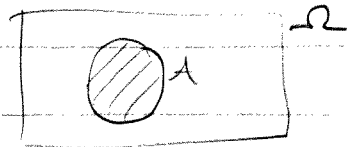
Några Venn-diagram: låt x = längd på slumpvis vald människa

Utfallsrum Ω
($\Omega^c = \emptyset$)



$$\Omega = \{x \text{ är } 0 - \infty \text{ cm}\}$$

Händelsen A



$$A = \{x \leq 170 \text{ cm}\}$$

Komplementära
händelsen

$$A^c = \Omega \setminus A$$

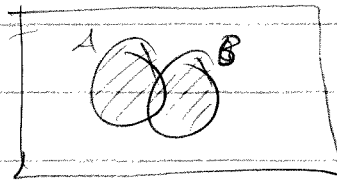


$$A^c = \{x \text{ är } > 170 \text{ cm}\}$$

Unionhändelsen

$A \cup B$;

(A eller B eller Båda)



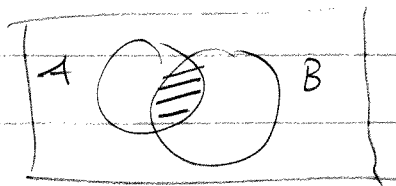
$$B = \{x \geq 160 \text{ cm} \ \& \ x \leq 180 \text{ cm}\}$$

$$A \cup B = \{x \leq 180 \text{ cm}\}$$

Snitthändelsen

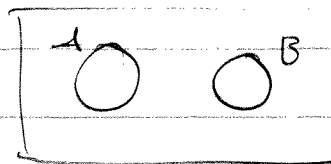
$A \cap B$

(både A & B)



$$A \cap B = \{x \geq 160 \text{ cm} \ \& \ x \leq 170 \text{ cm}\}$$

A & B disjunkta
(oförenliga)



$$B = \{x \geq 200 \text{ cm}\}$$

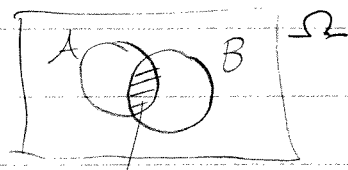
$$A \cap B = \emptyset$$

Räkneregler för sannolikheter

A och B godt. händelser i Ω .

(i) $P(\emptyset) = 0$ (slh för att inget händer är noll)

(ii) $P(A \cup B)$? (inte disjunkta som i Kolmogorov)

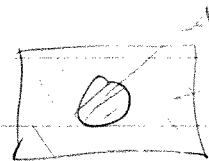


dubbelräkning

ex. tärning: $A = \{1, 2\}$
 $B = \{2, 3\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(iii) $P(A^c) = 1 - P(A)$

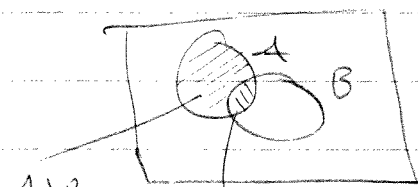


$A = \{1, 2, 3\}$
 $A^c = \Omega \setminus A = \{4, 5, 6\}$

(ty $A^c \cap A = \emptyset$ och $A^c \cup A = \Omega$ så (Kolmogorov))

$$\Rightarrow P(A^c) + P(A) = P(A^c \cup A) = P(\Omega) = 1.$$

(iv) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$



tabort $A \cap B$

$A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{2, 3, 4\}$