Förläsning 3

Stokastiska variabler/slumpvariabler

Låt X beteckna antalet prickar vi får på en tärning när vi kastar.

Innan vi kastar vet vi inte vad X är: så ingen "vanlig" variabel, utan en

$\boxed{\text{Stokastisk variabel}}$

Det enda vi kan veta är sannolikheten för olika utfall.
När vi utfört försöket får vi en

$\boxed{\text{observation}}$

av X, kallad x.

Diskreta stokastiska variabler

Stokastiska variabler som bara kan anta ett ändligt (eller uppräkneligt oändligt) antal värden.

t.ex.

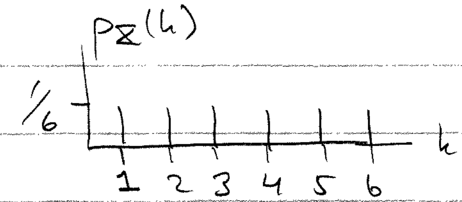
$X \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ som tärning

$X \in \{1, 2, \ldots\}$ (alla pos heltal).

__Def.__ __Sannolikhetsfunktionen__ $p_X(k)$ för en diskret s.v. X är

$$p_X(k) = P(X = k) = P(X \text{ antar värdet } k).$$

__Ex.__ Tärning: $X \in \{1, \ldots, 6\}$; $p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & k = 1, \ldots, 6 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$



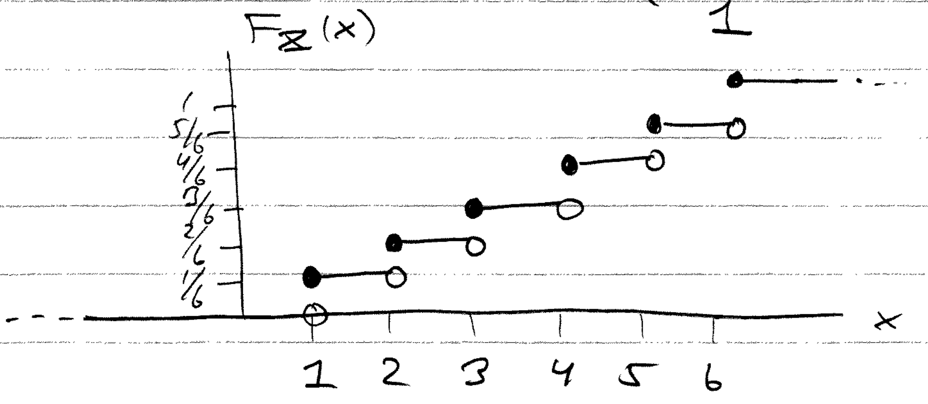
__Def.__ __Fordelningsfunktionen__ $F_X(x)$ för en diskret s.v. X är

$$F_X(x) = \underbrace{P(X \le x)}_{\substack{\text{kumulativ} \\ \text{sannolikhet (ackumulerad)}}} = \sum_{j \le x} p_X(j)$$

(definierad __för alla__ $x \in \mathbb{R}$)

__Ex.__ Tärning igen

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ [x]/6 = \frac{\text{heltalsdelen av } x}{6} & 0 \le x \le 6 \\ 1 & 6 < x < \infty \end{cases}$$



(stegfunktion)

Väntevärde

Ex. Kastar tärning tio ggr, får

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & & & & & & & x_{10} \\ 5 & 6 & 4 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{array}$$

- Medelvärde beräknas som

$$\bar{x} = \frac{5+6+4+4+1+2+2+3+6+4}{10} = \frac{37}{10} = \underline{3.7}$$

- eller $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Vissa tal dyker upp flera gånger, så låt

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k} n_k \cdot k \quad \text{där } n_k = \text{antal tal som är } k$$

dvs $\bar{x} = \frac{1}{10} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6)$

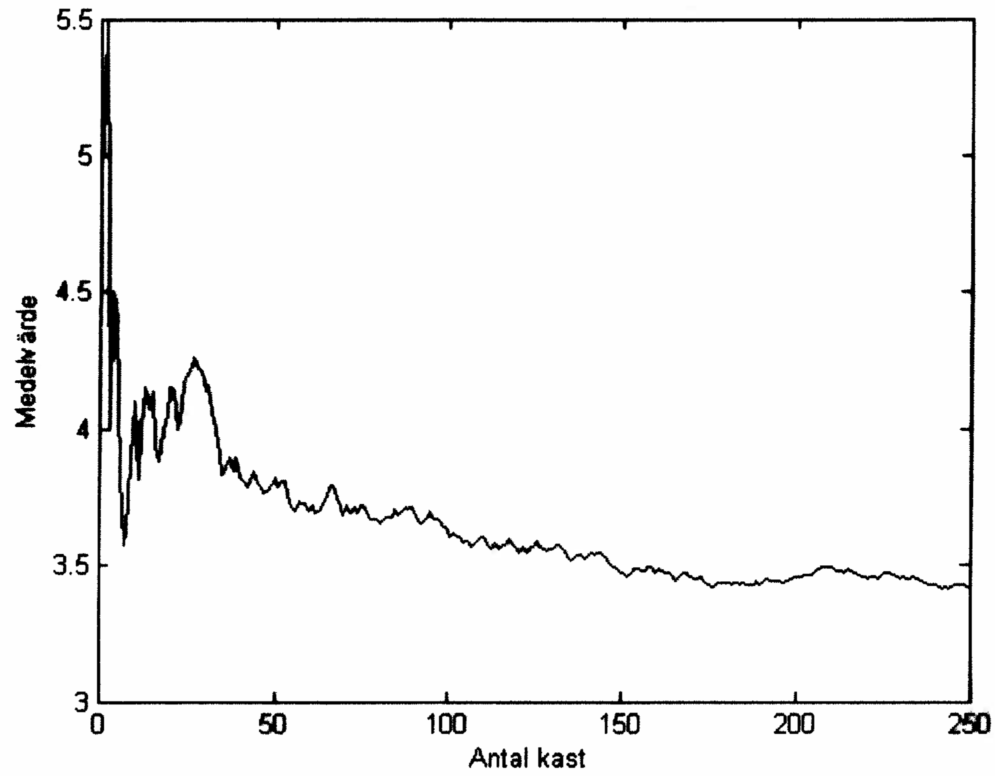
- $\bar{x} = \sum_k k \cdot \underbrace{\frac{n_k}{n}}_{\text{relativ frekvens}}$

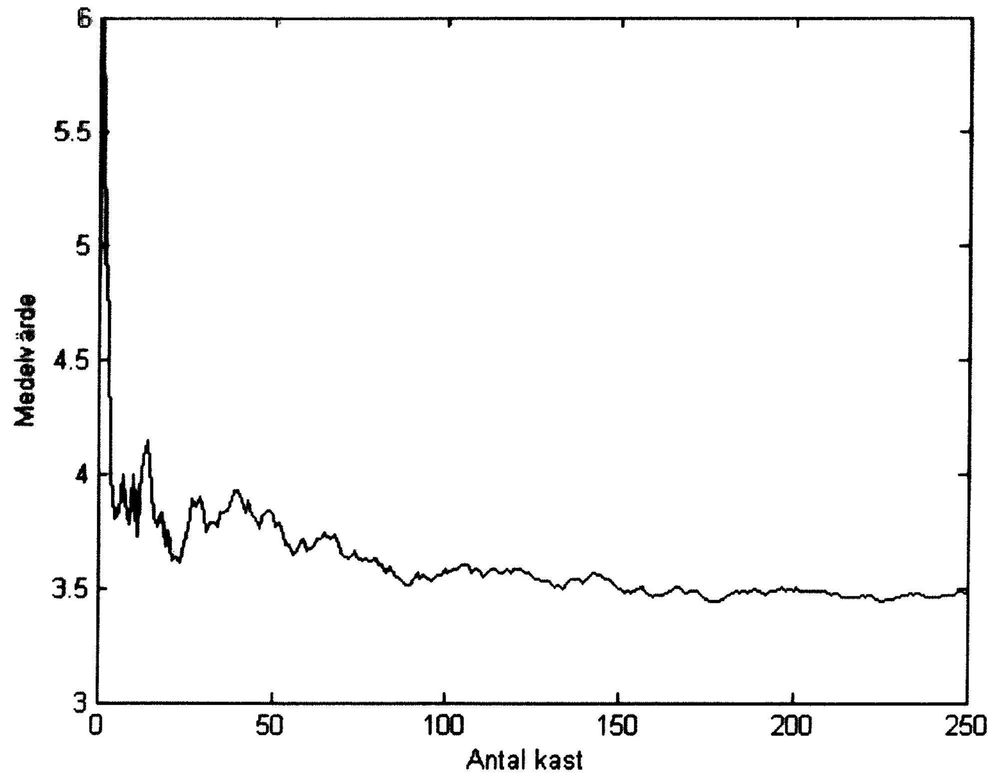
- relativ frekvens ~ sannolikhet

$\Rightarrow$ Def. Väntevärde (teoretiskt medelvärde, populations-medelvärde)

$$\boxed{\mu_X = E[X] = \sum_k k p(k)}$$

Väntevärde = medelvärdet av oändligt många observationer


Medelvärde
Antal kast
5.5
5
4.5
4
3.5
3
0
50
100
150
200
250


Medelvärde
Antal kast
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
0
50
100
150
200
250

Ex. Beräkna väntevärde för utfallet när vi kastar tärning.

Vet $p_X(k) = \frac{1}{6} \quad k = 1, \ldots, 6$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{k=1}^{6} k p_X(k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k =$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \underline{3.5}$$

(Jämfört med $\bar{x} = 3.7$ från tio kast).

~~Väntevärde = medelvärdet av ett oändligt antal kast.~~

Ex. En lott kostar 10 kr och man kan vinna 50 kr m. slh. 0.1 och 100 kr m. slh 0.01. Hur mycket kommer lotteriet i snitt att tjäna på varje såld lott?

Låt X = vinsten.

$$P(X=0) = 0.89, P(X=50) = 0.1, P(X=100) = 0.01$$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_x x p_X(x) = 0 \cdot 0.89 + 50 \cdot 0.1 + 100 \cdot 0.01 =$$

$$= 0 + 5 + 1 = \underline{6} \text{ kr}$$

men lotten kostar 10 kr så lotteriet tjänar 4 kr per lott i snitt.

Räkneregler för väntevärden

X, Y har sannolikhetsfunktionen $p_X(k)$, $p_Y(k)$, a konstant.

① $E[aX] = \sum_k (ak) p_X(k) = a \sum_k k p_X(k) = aE[X]$

② $E[X+a] = \sum_k (k+a) p_X(k) = \underbrace{\sum_k k p_X(k)}_{=E[X]} + \sum_k a p_X(k) =$

$= E[X] + a \underbrace{\sum_k p_X(k)}_{=1} = E[X] + a$

③ $E[h(X)] = \sum_k h(k) p_X(k)$ (generalisering av ① & ②)

④ $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

①, ② & ④ ger att väntevärde är linjärt: allmänt gäller då

⑤ $E[a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + c] = a_1 E[X_1] + a_2 E[X_2] + \dots + a_n E[X_n] + c$