

Föreläsning 5

Poissonfördelningen

1

Anta att något händer med lika stor sannolikhet hela tiden.

Ex.

- radioaktiva sönderfall i ett prov
- kunder kommer in i en bank (approx)
- tryckfel i text

I dessa fall har vi ett förväntat antal händelse per tidsenhet; tex

- antal kunder per timme
- antal sönderfall per minut



Så, låt λ = antal händelser per (godtycklig) tidsenhet
Vad är slh att det sker k sönderfall / besök / tryckfel på en tidsenhet, minut säg?

$$P(X=k)?$$

Dela in minuten i n lika stora delar $\Delta t = \frac{1}{n}$, där vi har slh p att något händer i varje delintervall $\Delta t \Rightarrow X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Problem: Kan hända mer än en gång per delintervall
Lösning: låt $\Delta t \rightarrow 0$!

Så låt $\Delta t \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, men vill att väntevärdet av X ska vara detsamma, så $E[X] = np = \lambda = \text{intensiteten}$.

$$\Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

$$P_X(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda}}{1}} =$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

• Så; en s.v. med slh-funktion

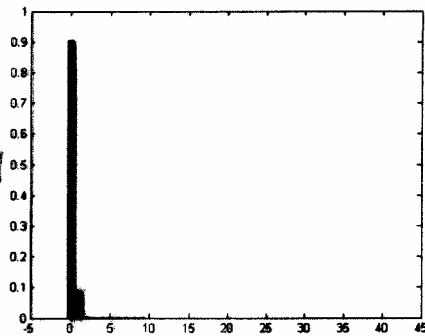
$$P_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\dots$$

• är $Po(\lambda)$ - fördelat.

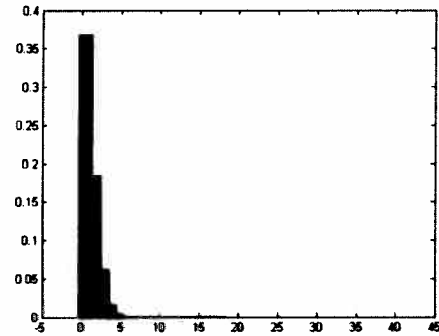
$$E[X] = \lambda, \quad V(X) = \lambda$$

Poissonfördelningar

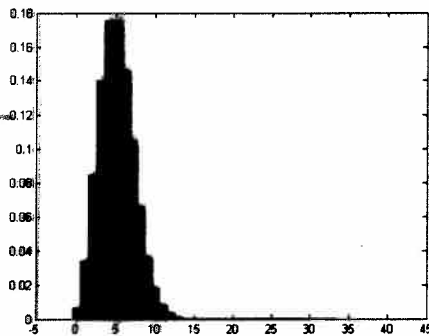
$\lambda = 0.1$



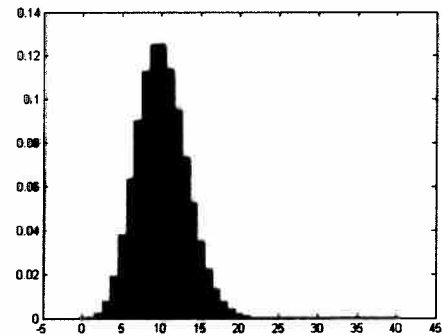
$\lambda = 1$



$\lambda = 5$



$\lambda = 10$

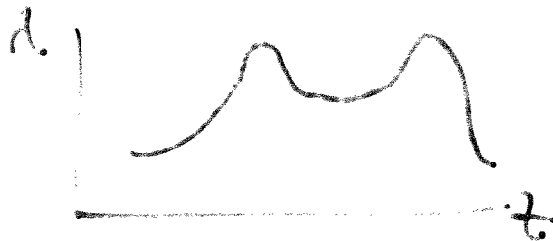


Hur bra stämmer Poisson?

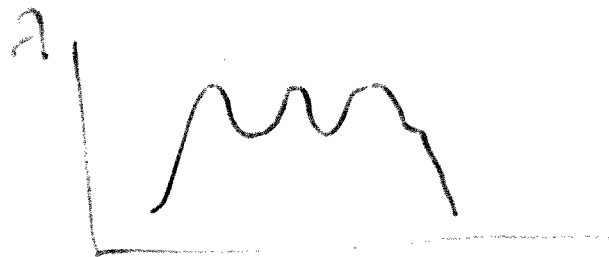
- radioaktivitet; minskar med tiden (halveringstid.) dvs intensiteten minskar



- kunder i butik; beror på tid på dagen



- tryckfel på sida; varierar med trötthet



Statistiska modeller stämmer aldrig (helt)?

Ex. Ett radioaktivt preparat sönderfaller med 10 sönderfall per sekund. Hur stor är slh att det under en sekund sker som mest 5 sönderfall?

X = antal sönderfall;
 $X \sim P_0(\lambda=10)$

● $P(X \leq 5)$?

● $F_X(5) = \sum_{k=0}^5 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; inte så lätt?

Tabell sid 390

$\rightarrow P(X \leq 5) = \underline{0.0671}$

Kontinuerliga stokastiska variabler

Ex. Antag att en buss kommer varje timme. Anna kommer till hållplatsen har ingen klocka, och undrar hur lång tid det är kvar till nästa buss.

Vet bara att väntetiden $T \in [0, 1]$ timmar

Då $P(0 \leq T \leq 1/2) = 1/2$ tex. (kan anta alla reella värden alla tider lika sannolika)

Allmänt: $P(T \in [a, b]) = b - a$ (likformig kontinuerlig slh-fördelning)
(Så slh är intervallets längd)

$$\Rightarrow P(T=t) = P(t \leq T \leq t) = t - t = 0 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$P(T=t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow$ sannolikhetsfunktionen
existerar inte.

istället: använd täthetsfunktion (som är
derivatan av fördelningsfunktionen)

Def. Fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

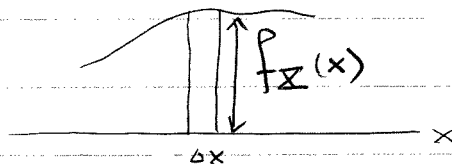
där $f_X(t)$ är täthetsfunktionen.

Obs: $f_X(x) \neq P(X=x)$

tolkning av täthetsfunktionen:

$$f_X(x) \approx \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f_X(x)\Delta x \approx F_X(x+\Delta x) - F_X(x) = P(x \leq X \leq x+\Delta x)$$



Kontinuerliga fördelningar, sammanfattning

$$f_X(x) \geq 0 \text{ överallt}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

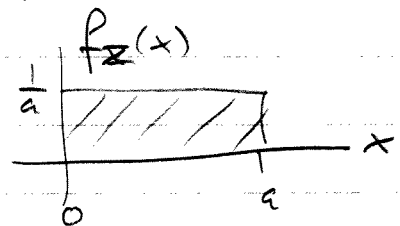
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

$$F_X(x) \begin{cases} \rightarrow 1 & x \rightarrow +\infty \\ \rightarrow 0 & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Ex. X är likformigt fördelad på $[0, a]$,
 $X \sim U([0, a])$

Vad är $f_X(x)$ & $F_X(x)$?

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/a & 0 \leq x \leq a \\ 1 & x > a \end{cases}$$

Väntevärde och varians

Låt Z vara kont. stoh. var med täthetsfunktion $f_Z(x)$.
Då gäller:

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x) dx$$

$$V(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[Z])^2 f_Z(x) dx$$

Kontinuerlig likformig fördelning

$$Z \sim U([a, b])$$

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$E[Z] = \int_a^b x f_Z(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$V(Z) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b =$$

