Föreläsning 12 & 13

Konfidensintervall för väntevärde, stickprov-i-par

Anta att vi gör 2 mätningar per individ / föremål, en före och en efter någon behandling;

z.ex: blodvärden före och efter någon behandling.

Så vi har observationer av stokastiska variabler

$$X_1, \ldots, X_n$$
$$Y_1, \ldots, Y_n$$

och X_i och Y_i är från samma individ (⇒ beroende)

Vill utnyttja beroendet, dvs inte skatta parametrar för X_i & Y_i separat.

Betrakta $Z_i = X_i - Y_i$

Då $E[Z_i] = E[X_i - Y_i] = E[X_i] - E[Y_i] = \mu_X - \mu_Y = \Delta$

Stickprov $z_1, \ldots, z_n$ från normalfördelning med väntevärde Δ.

$E[\bar{Z}] = \Delta$; $V(\bar{Z}) = \frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}}$ $\quad \sigma_Z$ antar vi okänd.

Så $\frac{\bar{Z} - \Delta}{\sigma_Z / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Om vi ersätter σ_Z med $S_Z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2}$
som innan...

Så $\frac{\bar{Z} - \Delta}{S_Z / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

och $I_\Delta = \left[\bar{z} - t(n-1)_{\alpha/2} \frac{s_z}{\sqrt{n}}, \; \bar{z} + t(n-1)_{\alpha/2} \frac{s_z}{\sqrt{n}} \right]$

är ett $100(1-\alpha)\%$ konf. int.

Konfidensintervall för andelar (i oändlig population)

ex. Ebba påstår sig sätta 80 av 100 straffar i basket. Hon kastar 100 och sätter 74. Talar detta emot Ebbas påstående?

- Ansätt att antalet träffar är $X \sim Bin(n,p)$ med $n=100$; och $\hat{p} = \frac{74}{100} = 0.74$. Tumregeln är att
- $X \sim$ Normal om $np(1-p) \geq 10$; nu har vi inte p utan $\hat{p}$; men $n\hat{p}(1-\hat{p}) = 19.2$ och $p \approx \hat{p}$ så approx rimlig.

$$\Rightarrow X \overset{appr.}{\sim} N(np, \sqrt{np(1-p)}) \text{ dvs}$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \underset{appr.}{\sim} N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

- $$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}} \approx \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}} \underset{appr}{\sim} N(0,1)$$

- Så $P\left(-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}} \leq \lambda_{\alpha/2}\right) = \alpha$

$$\Rightarrow P\left(\hat{p} - \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} \leq p \leq \hat{p} + \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}\right) = \alpha$$

Välj 95% konf int; så $\lambda_{0.025} = 1.96$ och

$$I_p = \left[0.74 - 1.96\sqrt{\frac{0.74(1-0.74)}{100}},\ 0.74 + 1.96\sqrt{\frac{0.74(1-0.74)}{100}}\right] =$$

$$= [0.654, 0.826]$$

Så $0.8 \in I_p$; så med den valda signifikansgraden ger konfidensintervallet inget stöd för att Ebba har fel.

Så $100(1-\alpha)\%$ konf int för andel p i oändlig population

$$I_p = \left[\hat{p} - \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Hypotesprövning / statistiska tester / hypotestest

Vissa parametervärden kan vara särskilt intressanta, t.ex.

- är $\mu = 50$?
- är $p > 0.8$?

Vi kan testa såna hypoteser med hypotestest.

Test av väntevärde

Ex. (5.11, typ)

Mangans smältpunkt uppmäts till 1269°, 1271°, 1263° & 1265

En person tror att smältpunkten är 1271°. Ger data någon grund för att han har fel?

$\bar{X} = 1267.0$, $S = 3.65$

95% konf int

$$I_\mu = \left[\bar{x} - t(3)_{0.025} \cdot \frac{S}{\sqrt{4}}, \bar{x} + t(3)_{0.025} \cdot \frac{S}{\sqrt{4}}\right] = [1261.2, 1272.8]$$

Eftersom $1271 \in I_\mu$, verkar det orimligt att säga att påståendet är fel.

Formalisering

Värdet $\mu = 1271$ är intressant. Vi kallar det vår $\boxed{\text{nollhypotes}}$:

$H_0 : \mu = \mu_0 = 1271$ (nollhypotes)

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ (alternativ, mothypotes)

I detta fall är hypotestest och konfidensintervall nära relaterade. Vi gör ett $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konf.int.

$$I_\mu = \left[\bar{x} - t(n-1)_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t(n-1)_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Om $\mu_0 \in I_\mu$ så verkar data inte ge något stöd för att $\mu \neq \mu_0$, om tvärtom $\mu_0 \notin I_\mu$ så verkar data inte ge något stöd för $\mu = \mu_0$.

$\mu_0 \in I_\mu$, ett $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konf.int $\Leftrightarrow$ vi förkastar inte H_0 på signifikansnivån α (eller $\alpha \cdot 100\%$)

$\mu_0 \notin I_\mu$, ett $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konf.int $\Leftrightarrow$ vi förkastar H_0 på signifikansnivån α

Obs: Om vi väljer att inte förkasta H_0; så är det inte samma sak som att H_0 sann (skulle krävas ∞ många stickprov). Betyder bara att observationerna inte vore orimliga om H_0 vore sann.

Test av väntevärdesskillnad

Nästan identiskt med test av väntevärde.

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ (vanligast att $\mu_X - \mu_Y = 0$; kan ha $\mu_X - \mu_Y = \delta$)
$H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

100(1−α)% konf int:

$$I_{\mu_X - \mu_Y} = \left[\bar{X} - \bar{Y} - t(n_X + n_Y - 2)_{\alpha/2} \frac{s_p}{\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}, \bar{X} - \bar{Y} + t(n_X + n_Y - 2)_{\alpha/2} \frac{s_p}{\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \right.$$

Om 0 (eller δ) $\in I_{\mu_X - \mu_Y}$ så behåller vi H_0 på α-nivån, annars förkastar vi.

Test av andel

$H_0: p = p_0$
$H_1: p \neq p_0$

100(1−α)% konf int. fås som

$$I_p = \left[\hat{p} - \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Om $p_0 \in I_p$ så behåller vi H_0, annars förkastar vi på α-nivån.

Ex. 1000 personer tillfrågas om de har förtroende för Fredrik Reinfeldt. 52% procent svarar ja. Kan man säga att en majoritet har förtroende?

$$\hat{p} = \frac{520}{1000} = 0.52$$

Konfint 95%:

$$I_p = \left[\hat{p} - \underbrace{\lambda_{0.025}}_{1.96}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}},\ \hat{p} + \underbrace{\lambda_{0.025}}_{1.96}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}}\right] =$$

$$= [0.4890, 0.5510].$$

I_p innehåller värden < 0.50, så på 5% signifikansnivå ($\alpha = 0.05$) kan vi inte hävda majoritet.

Om vi höjer α (alltså sänker konfidensgraden), kan vi då få ett intervall som inte innehåller värden < 0.50?

Se tabell sid 391; kan få 75% konfint ($\Leftrightarrow$ test på 25% signifikansnivå)

som är

$$I_p = \left[\hat{p} - \lambda_{0.875}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}}, \ldots\right] = [0.5018, 0.5382]$$

$\Rightarrow$ På 25% signifikansnivå kan vi hävda majoritet

Är någon intresserad av ett sådant resultat?

Nej, testet är baserat på 75% konf int.,
$\Rightarrow$ osäkert påstående

Var går "gränsen"; dvs hur lågt (högt) för att utesluta andelar < 0.50?

$\Rightarrow$ Lös ekv. $\hat{p} - \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}} = 0.50$ m.a.p. α

$\Rightarrow \lambda_{\alpha/2} = \dfrac{\hat{p}-0.50}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}}} = 1.2654$

$\Rightarrow$ (Tabell s. 391): $\frac{\alpha}{2} \approx 1-0.898 = 0.102$

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha \approx 0.204}$ (detta är det så kallade p-värde)

Svarande mot ca 80% konf int.

$\Rightarrow$ Vi kan inte hävda majoritet med någon trovärdighet.

Tolkning av p-värde

Detta betyder att ett test på lägre signifikansnivå förkastar hypotesen om majoritet, men ett test på högre signifikansnivå behåller den.
Ju lägre p-värde, desto trovärdigare slutsats.

Hypotestest, sammanfattning

I alla genomgångna fall så har vi hypoteser

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

och ~~ett~~ konfint. på $100(1-\alpha)\%$ konfidensgrad, $I_\theta($

Om $\theta_0 \notin I_\theta(\alpha)$ så förkastas nollhypotesen H_0 på signifikansnivån $100 \cdot \alpha\%$, om däremot $\theta_0 \in I_\theta(\alpha)$ så förkastas den inte.

Ett hypotestests p-värde är det tal p för vilket hypotesen förkastas för alla nivåer $\alpha > p$ men förkastas ej för nivåer $\alpha < p$.