Kortfattade lösningar, LMA210 Statistik för lärare, 13/11 2009

1 (a) $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$ så $c+2c+3c=1 \Rightarrow 6c=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{6}}$

(b) $E[X] = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6} = \frac{1+4+9}{6} = \frac{14}{6} = \boxed{\frac{7}{3}}$

(c) $E[2^X] = 2^1\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{2}{6}+2^3\cdot\frac{3}{6} = \frac{2+8+24}{6} = \frac{34}{6} = \boxed{\frac{17}{3}}$

2 Varje dag gäller att antalet sedda fåglar är Poissonfördelat med intensitet $\lambda=1$. Låt X_i vara antalet sedda fåglar på i:te dagen i veckan. Då $X_i \sim Po(\lambda)$ för alla i så

$$P(X_i=0) = p_{X_i}(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = (\lambda=1) = \frac{1e^{-1}}{1} = \frac{1}{e}$$

Vi har sju dagar i veckan och de är oberoende så

$$P(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\ldots\cap\{X_7=0\}) = P(X_1=0)P(X_2=0)\cdots P(X_7=0)$$

$$= P(X_i=0)^7 = \boxed{\frac{1}{e^7}}$$

alt: titta i tabell $\Rightarrow$ $P(X_i=0)=0.3679$ svarande mot

$$P(X_i=0)^7 \approx \boxed{0.00091224} \quad \left(=\frac{1}{e^7}\right)$$

3 (a) $P(X=0) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(0,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$

(b) $P(X+Y=1) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(1,0) = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$

(c) $p_X(0) = 3/8,\ p_X(1) = 5/8,\ p_Y(0) = 3/8,\ p_Y(1) = 5/8$

Kolla om $p_{XY} = p_X p_Y$:

$p_X(0)p_Y(0) = 9/64 \neq 1/4 = p_{XY}(0,0)$

så X & Y är <u>inte</u> oberoende.

4. Eftersom $0 \leq X \leq 1$ så $0 \leq 3X^2 \leq 3$, dvs $[3X^2]$ kan anta värdena $0, 1, 2, 3$.

$$P(Y=0) = P([3X^2]=0) = P(0 \leq 3X^2 < 1) = P\left(0 \leq X^2 < \frac{1}{3}\right) =$$
$$= P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(\text{ty } X \sim U([0,1]), \text{ så } P(a \leq X \leq b) = b-a\right).$$

på samma sätt: $P(Y=1) = P(1 \leq 3X^2 < 2) = P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \leq X < \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

och $P(Y=2) = P(2 \leq 3X^2 < 3) = P\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \leq X < 1\right) = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$

$P(Y=3) = P(3X^2 = 3) = 0$

Så $p_X(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{3} & k=0 \\ \sqrt{2/3} - 1/\sqrt{3} & k=1 \\ 1 - \sqrt{2/3} & k=2 \\ 0 & k=3 \end{cases}$

så fördelningsfunktionen är

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}}$$

5. Antalet studenter som svarar 'ja' är Bin(97, p)-fördelat där p är den verkliga proportionen i hela populationen som går på afterwork.
Skattar p enligt

$$\hat{p} = \frac{57}{97} \approx 0.5876$$

För tillräckligt stort stickprov kan vi approximera binomialfördelningen med en normalfördelning. Ett approximativt konfidensintervall fås då som

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

där $n = 97$, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

$$\Rightarrow \quad I_p = [0.4897, 0.6856] \quad (0.5876 \pm 0.0980)$$

Konfidensintervallet innehåller värden < 0.50, dvs mätningen ger på denna signifikansnivå <u>inte</u> grund för påståendet att $p > 0.50$.

6. Skatta medelvärden och varianser

$$\bar{x}_1 = (15.2 + 16.2 + 15.7 + 17.5 + 16.2)/5 = 16.16$$
$$\bar{x}_2 = (18.2 + 17.5 + 17.6 + 16.4)/4 = 17.5$$

$$s_1^2 = 0.733, \quad s_2^2 = 0.74$$

'pooled variance': $\hat{\sigma}^2 = s_p^2 = \dfrac{(5-1)s_1^2 + (4-1)s_2^2}{5+4-2} = 0.736$

6, forts.

$100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

där $n_1=5$, $n_2=4$, $\alpha=0.05$. $t_{0.025}$ tas ur t-fördelning med $n_1+n_2-2=7$ frihetsgrader.

Tabell $\Rightarrow$ $t_{0.025}=2.365$

$\Rightarrow$ konf. int.: $\boxed{-1.34 \pm 1.36 \Leftrightarrow [-2.70, 0.02]}$

notera att både negativa & positiva värden finns i konfidensintervallet, så vi fick ingen skillnad i medelvärde på denna signifikansnivå.

7. (a) Man utnyttjar ett större stickprov vilket ger en lägre varians för skattaren.

(b) $E[\bar{X}] = E\left[\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}E[X_1+\ldots+X_n] = \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}E[X_i] = \mu$

Så $E[\bar{X}]=\mu \Rightarrow$ väntevärdesriktig.

8. $E[X] = V(X) = E[Y] = V(Y) = 1.$

$$V(XY) = E[(XY)^2] - E[XY]^2 = E[X^2Y^2] - E[XY]^2 =$$
$$= (\text{oberoende}) = E[X^2]E[Y^2] - \underbrace{E[X]^2}_{=1}\underbrace{E[Y]^2}_{=1} =$$
$$= \underbrace{E[X^2]}\underbrace{E[Y^2]}_{=2} - 1 = 2^2 - 1 = \boxed{3}$$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 \Rightarrow E[X^2] = V(X) + E[X]^2 = 1 + 1^2 = 2$$

9. X = antal gånger hon får trea eller högre.
$X \sim Bin(n = 100, p = P(\text{trea eller högre})) = Bin(100, 2/3).$
$np(1-p) = 100 \cdot \frac{2}{9} \geq 10$ så vi approximerar:

$$X \overset{\text{appr.}}{\sim} N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N\left(\frac{200}{3}, \frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$P(X \geq 70) = P\left(\underbrace{\frac{X - \frac{200}{3}}{\frac{10\sqrt{2}}{3}}}_{= W \sim N(0,1)} \geq \frac{70 - \frac{200}{3}}{\frac{10\sqrt{2}}{3}}\right) =$$

$$= P\left(W \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P\left(W \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 1 - \underbrace{\Phi(0.7071)}_{\text{tabell} \Rightarrow \sim 0.7611} = \boxed{0.2389}$$