

Lösningar till tentamen i Statistik för lärare LMA210, 2010-01-13

$$1(a) \quad P(Y=1) = P(Y=1|X=0)P(X=0) + P(Y=1|X=1)P(X=1) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(b) \quad P(XY \leq 1) = 1 - P(XY = 2) = 1 - P(Y=2|X=1)P(X=1) = \\ = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

↑
enda värdet > 1

2. $X \sim \text{Po}(\lambda)$ svarar mot antal mutationer.

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\dots$$

$$\text{Givet: } P(X=0) = 0.5 \Rightarrow \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 0.5 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0.5$$

$$\Rightarrow e^{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \ln 2 = 0.693 \approx 0.7$$

Finns i tabell!

$$\text{Tabell} \Rightarrow P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.8442 = \boxed{0.1558}$$

$$3.(a) \quad P(\text{alla olika}) = \frac{\text{antal sätt alla olika}}{\text{antal möjliga komb}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \boxed{\frac{20}{36}}$$

$$(b) \quad P(\text{alla lika}) = \frac{6 \text{ sätt}}{6^3 \text{ komb}} = \boxed{\frac{1}{36}}$$

(c) (a) & (b) ger nu att

$$P(\text{exakt två lika}) = 1 - \frac{20}{36} - \frac{1}{36} = \boxed{\frac{15}{36}}$$

$$4. P(Y \leq x) = P(\Phi^{-1}(Z) \leq x) = P(Z \leq \Phi(x)) \\ = \Phi(x)$$

Så Y 's fördelningsfunktion är $\Phi(x) \Rightarrow \boxed{Y \sim N(0, 1)}$

5. Antal ja-svar antas $\text{Bin}(100, p)$ -fördelade, där p är den sanna proportionen ja-svar i hela populationen.

Skattar p : $\hat{p} = \frac{55}{100} = 0.55$

$n\hat{p}(1-\hat{p}) \geq 10$ (mycket större) så vi approximerar Bin med normalfördelning, och får approx konf int som

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad n=100 \quad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

$$\rightarrow I_p = [0.4525, 0.6475]$$

intervallet innehåller värdet < 0.50 , dvs på den signifikansnivå ges ingen grund för påst. $p > 0.50$

6. Anta att obs. tagna från normal: $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$X_1 = 39.6, X_2 = 38.3, X_3 = 40.1, X_4 = 40.3, X_5 = 38.9$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 39.44$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = 0.6980, S = 0.8355$$

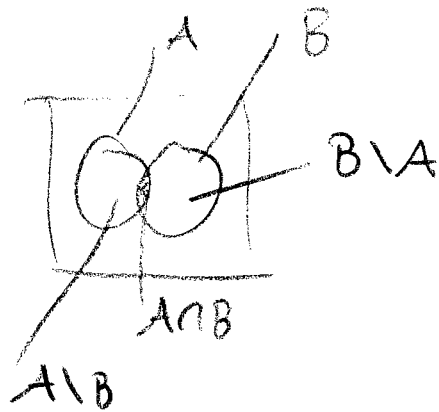
100(1- α)% konf int ges av

$$I_{\mu} = \bar{X} \pm t(n-1)_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{där } n=5, \alpha=0.01$$

Så söker $t(4)_{0.005} = 4.604$ enl. tabell

$$\Rightarrow I_{\mu} = 39.44 \pm 4.604 \cdot \frac{0.8355}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{[37.72, 41.16]}}$$

7(a)



$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) =$$

$$= \underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B)}_{P(A)} + \underbrace{P(B \setminus A) + P(A \cap B)}_{P(B)} - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geq 0} \leq P(A) + P(B)$$

$$(b) E[(X - E[X])^2] \stackrel{\geq 0}{=} E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] =$$

$$= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = \boxed{E[X^2] - E[X]^2}$$

$$(c) P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P((A \cap A) \cup (A \cap B))}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \boxed{\frac{P(A)}{P(A) + P(B)}}$$

$$\text{ty } (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup \emptyset = A$$

och $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ty A & B disjointa

8. D = dopad, T = test positiv

$$\text{Givet: } \begin{cases} P(D) = 0.01 \\ P(T|D) = 0.99 \\ P(T^c|D^c) = 0.99 \end{cases}$$

Vad är $P(D|T)$?

$$P(T^c|D^c) = 0.99 \Rightarrow P(T|D^c) = 0.01$$

Bayes sats:

$$P(D|T) = \frac{P(D)P(T|D)}{P(D)P(T|D) + P(D^c)P(T|D^c)}$$

$$= \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.01 \cdot 0.99} = \boxed{\frac{1}{2}}$$