Några extra uppgifter i sannolikhetsteori

Sannolikheter

1.1 Vad är sannolikheten att inte få en enda triss i sexor under 50 kast med 3 tärningar?

1.2 Vad är sannolikheten att få minst ett par i sexor under 24 kast med 2 tärningar?

1.3 Visa att $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$ om A, B, C är disjunkta händelser.

1.4 Om vi singlar ett symmetriskt mynt upprepade gånger tills vi får klave första gången. Vad är sannolikheten att vi slutar efter 5 kast?

Uppgifter av kombinatorisk natur

2.1 På hur många olika sätt kan en kortlek delas ut till fyra spelare om alla får 13 kort var och ordningsföljden är ointressant?

2.2 Det finns tio bollar i en urna, sju blå och tre röda. Bollarna blandas, tas upp en och en och placeras på rad. Hur stor är sannolikheten att de tre röda bollarna hamnar intill varandra?

2.3 En person har 10 kompisar och skall bjuda fem av dem på fest.

a Hur många olika kombinationer av kompisarna finns det om 2 av kompisarna vägrar komma till samma fest?

b Hur många olika kombinationer av kompisarna finns det om 2 av kompisarna bara kommer tillsammans? **2.4** Elva personer, som representerar olika länder, skall placeras. Representanten från Brasilien och Representanten från USA skall inte placeras bredvid varandra. På hur många sätt kan de placeras

a vid ett runt bord? (Två placeringar antas vara samma om de kan fås genom att rotera bordet!)

b i rad?

2.5 Emil har 20 leksaker, bland vilka han tycker att 12 är roliga och 8 tråkiga.

a. Antag att Emil skall på utflykt och endast 5 leksaker kan följa med. Hur många leksakskombinationer finns det då så att

(i) alla fem som kommer med är roliga,

(ii) 4 stycken, av de 5 som kommer med, är roliga?

b. Om han har bråttom och de fem leksakerna som skall följa med väljs slumpmässigt, vad är sannolikheten att alla 5 är roliga?

c. Emils mamma skall nu rada upp alla 20 leksakerna. På hur många sätt kan detta göras så att alla de 12 roliga hamnar bredvid varandra och alla de 8 tråkiga hamnar bredvid varandra?

d. Om Emil själv radar upp dem själv så blir den inbördes ordningen helt slumpmässigt. Vad är då sannolikheten att alla de 12 roliga hamnar bredvid varandra och alla de 8 tråkiga hamnar bredvid varandra?

Oberoende och betingning

3.1 Betrakta ett kast med två tärningar. Är händelserna $A = \{1\text{:a tärningen } 6\}$ och $B = \{\text{summan } 5\}$ oberoende?

3.2 Vi drar ett kort från en välblandad kortlek. Är händelserna $A = \{\text{kortet är ett ess}\}$ och $B = \{\text{kortet är ett spader}\}$ oberoende?

3.3 Antag att vi drar tre kort från en välblandad kortlek. När alla tre kort är dragna tittar vi på de två som drogs sist av dem. Antag att dessa är spader. Vad är den betingade sannolikheten att det först dragna kortet är ett spader, givet att de två övriga är spader?

3.4 Antag att vi har tre kort som har samma egenskaper förutom färgen. Båda sidorna på det första kortet är röda, båda sidorna på det andra kortet är svarta och det tredje kortet har en röd och en grön sida. De tre korten blandas och läggs i en hatt. Ett kort väljs (slumpmässigt och läggs på ett bord. Om den sidan som ligger uppåt på det valda kortet är röd, vad är sannolikheten att den andra sidan är svart?

3.5 Vi betraktar 3 länder; Sverige, Tyskland och Norge. Det finns 82 miljoner invånare i Tyskland, 9 miljoner i Sverige och 4.5 miljoner invånare i Norge. Vi uppskattar att 55% av svenskarna kan engelska, 65% av norrmännen medans enbart 25% av tyskarna kan engelska.

Vi väljer nu slumpmässigt ut en person från något av länderna (alltså bland de totalt 95.5 miljoner människorna) och frågar om han/hon kan engelska. Om svaret är ja, vad är den betingade sannolikheten att han/hon är svensk?

3.6 Antag att du har en back läsk, bestående av 8 Coca-cola och 12 Ramlösa, stående i källaren. Du skall titta på ditt favoritprogram och förbereder dig med chips och andra tilltugg, samt går ner i källaren för att hämta tre flaskor ur backen. Du är inte speciellt förtjust i Ramlösa och dricker helst Cola, men just när du hämtar flaskorna är du djupt försjunken i ett sannolikhetsteoretiskt problem och väljer slumpmässigt ut tre flaskor ur backen (utan att notera vilken sort de är). Den första du valde tar du i vänster hand och de övriga två i höger hand. Forsatt försjunken i problemet ställer du in flaskorna i kylen så att den du har i vänster hand hamnar innerst och de överiga två ytterst (du har fortfarande inte sett vilken sort de är). Allt eftersom programmet fortlöper hämtar du drickor, du öppnar dock bara kylskåpet lite och sticker in handen för att hämta en ny. När två av drickorna är uppdruckna blir du medveten om att du inte vet vilken sort den tredje (den du valde först ur backen) är. Du ser att de två först druckna är Cola och undrar nu hur stor chansen är att även den tredje är en cola, eftersom du inte vill springa ner till källaren igen. Hur stor är den betingade sannolikheten att den sista drickan i kylen är Coca-cola, givet att de första två är det?

3.7 Vi delar in sveriges befolkning i fyra grupper (efter ålder) enligt:

A: 0-17 år,
B: 18-40 år,
C: 41-60 år,
D: 60- år.

Antag att 21% av befolkningen tillhör A, 27% B och 30% C. Vidare så har 1% i A, 1.5% i B, 3% i C och 5% i D diabetes. Vi väljer nu en person slumpmässigt och det visar sig att denne har diabetes. Vad är då sannoliheten att han/hon är mellan 18 och 40 år?

3.8 Vårt favoritfotbollslag spelar match. I fotboll är det 11 spelare i varje lag (10 utespelare och en målvakt). Vi spelar med en 4-4-2-uppställning, vilket innebär att det är fyra backar, fyra mittfältare (två offensiva och två defensiva) samt två anfallare. Det är cupfinal, mycket står på spel, ställningen är 0-0 och i sista minuten får vårt lag en straff. I brist på logiskt tänkande väljer tränaren ut straffskytten helt slumpmässigt bland de 11 spelarna.

Antag att en anfallare gör mål i 90% av de straffar han lägger, en offensiv mittfältare i 70%, en defensiv mittfältare i 50%, en back i 30% och målvakten gör enbart mål i 10% av de straffar han lägger. Straffen läggs, det blir mål och vi vinner cupen. Vad är den betingade sannolikheten att det var en defensiv mittfältare som blev "match-hjälte"?

3.9 Antag att 5% av män och 0.25% av kvinnor är färgblinda. En färgblind person väljs på måfå.

a. Vad är sannolikheten att denna person är en man? Antag att det finns lika många män som kvinnor.

b. Vad blir svaret om det finns dubbelt så många män som kvinnor?

Diskreta stokastiska variabler

4.1 Antag att X är en diskret S.V. med sannolikhetsfunktion

$$p_X(k) = \frac{1}{N},\ k = 1, ..., N.$$

Vad är $\mathbf{E}(\mathbf{X})$?

4.2 Vad är förväntat antal rätt på en slumpad tipsrad?

4.3 Antag att Y är en diskret S.V. med sannolikhetsfunktion

$$p_X(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, ...$$

där parametern $\lambda > 0$. Vad är $\mathbf{E}(Y)$?

4.4 Antag att Svenska Spel (SS) funderar på att starta ett nytt spel som går ut på följande: Spelaren singlar slant tills han/hon får klave. Man räknar antalet singlingar som behövdes t.o.m. första klaven. Om den första klaven kom i kast nummer j, $j = 1, 2, ...$ så får spelaren 2^j kronor av SS. Hur mycket skall lottpriset minst vara för att SS skall tjäna på detta spel?

Räkneregler för väntevärden och varians

5.1. Vilket a minimerar $\mathbf{E}((X - a)^2)$?

5.2. Antag $\mathbf{E}(X) = 2$ och $\mathbf{V}(X) = 5$. Vad är $\mathbf{E}((5 + X)^2)$.

5.3. Antag $\mathbf{E}(X_i) = \mu$ och $\mathbf{V}(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, ..., n$ samt X_i:na oberoende. Vad är $\mathbf{E}(S^2)$, där

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 .$$

5.4. Antag X och Y oberoende S.V. s.a. $\mathbf{V}(X) = \sigma_X$ och $\mathbf{V}(Y) = \sigma_Y$. Vad är

a. $\mathbf{V}(X + Y)$;
b. $\mathbf{V}(X - Y)$;
c. $\mathbf{V}(2X - \frac{Y}{4})$?

5.5. Antag X S.V. s.a. $\mathbf{E}(X) = \mu$ och $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$. Vad är

a. $\mathbf{E}\left(\mathbf{E}(X)\right)$;
b. $\mathbf{E}\left(\mathbf{V}(X)\right)$;
c. $\mathbf{V}\left(\mathbf{E}(X)\right)$?

Diskreta stokastiska variabler - några vanliga fördelningar

6.1 Antag att du är och spelar bowling. En omgång i bowling består av 10 stycken försök att slå ner 15 käglor med ett klot, i varje försök har man två kast. Om man i ett försök slår ner alla 15 käglorna med första kastet så får man en *strike*. Du uppskattar att du i genomsnitt får 4 “strikar” under en omgång. Vad är sannolikhten att du under en omgång får mellan 3 och 5 “strikar”? Antag utfallet i de 10 delomgångarna oberoende.

6.2 I en genomsnittlig skolklass i Göteborg så håller 20% på IFK. Antag att vi väljer ut en klass i Göteborg och sedan frågar 15 slumpmässigt valda elever om de är Blåvitt-fans eller inte. Vad är sannolikheten att 5 av dessa svarar ja?

6.3 Antag att vi följer St. Petersburg-strategin i roulette. I roulette väljs ett av 38 nummer slumpmässigt. 18 nummer är röda, 18 svarta och 2 är gröna. Spelaren kan satsa på lite olika saker. Om man väljer att satsa på rött eller svart och det nummer som kulan stannar på har den färg man satsade på så vinner man lika mycket som man satsat (d.v.s. man får tillbaka dubbla insatsen).

Strategin går ut på att man väljer rött eller svart och satsar sedan konsekvent på den valda färgen. Börjar man med insatsen x kronor och förlorar i första omgången så satsar man $2x$ i andra omgången, förlorar man även här satsar man $4x$ kronor i tredje o.s.v. Hela tiden på samma färg. I omgång j satsar vi alltså (givet att vi ej vunnit i någon av omgång $1, ..., j-1$) 2^{j-1} kronor. Varje gång man vinner så börjar man om och satsar x kronor.

Om vi satsar 100 kronor i första omgången, vad är sannolikheten att vi minst måste lägga ut 6300 kronor innan strategin ger utdelning?

6.4 Antalet parkeringsböter som delas ut i Göteborg, under en viss minut (dagtid), antas följa en Poissonfördelad stokastisk variabel, med intensitet 3.

a. Vad är sannolikheten att det inte delas ut någon p-bot i Göteborg under en viss minut?

b. Vad är sannolikheten att det maximalt delas ut 2 parkeringsböter under en viss minut?

c. Vi betraktar nu en kvart (d.v.s. 15 minuter) och antar att antalet p-böter som delas ut under en viss minut är oberoende av antalet p-böter som delas ut under en annan minut. Vad är sannolikheten att det under minst 13 minuter, i denna kvart, delas ut maximalt 2 p-böter?

6.5 Antag X är Poissonfördelad med parameter 11. Vad är

$$\mathbf{P}\left(\frac{X-3}{14} \leq 1\right)?$$

6.6 När Sven, något överförfriskad, kommer hem från krogen har han alltid problem att öppna dörren. Detta p.g.a. att han står och fumlar med nyckeln och inte kan träffa nyckelhålet. Omständigheterna gör att vi kan betrakta antalet försök att öppna dörren t.o.m. det försök då han lyckas öppna den som en ffg-fördelad stokastisk variabel, med parameter p. Vi uppskattar sannolikheten att han lyckas öppna dörren i respektive försök till 0.25.

a. Hur många försök att öppna dörren, efter ett krogbesök, kan vi förvänta oss i genomsnitt?

b. Vad är sannolikheten att han kommer in vid första försöket?

c. Vad är sannolikheten att han maximalt behöver försöka 3 gånger?

d. Sven går på krogen 8 gånger under en månad. Vad är sannolikheten att han efter minst 5 av dessa 8 krogbesök kommer in vid första försöket?

6.7 Antag $X \sim Bin(n_1, p)$ och $Y \sim Bin(n_2, p)$. Vad är väntevärde och varians för $Z = X + Y$?

Kontinuerliga stokastiska variabler

7.1 Antag X S.V. med täthet $f_X(x) = \alpha e^{-x\alpha}$, $x > 0$, där $\alpha > 0$ konstant. Vad är $\mathbf{E}(X)$?

7.2 Antag X S.V. med täthet $f_X(x) = \frac{c}{x^3}$, $x > 1$, där c konstant. Vad är

a. c;
b. $\mathbf{E}(X)$;
c. $\mathbf{V}(X)$?

7.3 Antag att vi har en bräda med längden L och vi väljer slumpmässigt en punkt där vi sågar av brädan. Vad är sannolikheten att kvoten mellan den korta och den långa delen är mindre än $1/4$?

7.4 Låt X vara likformigt fördelad på $(0, 1)$. Beräkna $\mathbf{E}(X^n)$. Ledning: bestäm först täthetsfunktionen för X^n.

7.5. På mitt kontor finns det fem likadana lampor, i vilka det sitter fem likadana glödlampor. Antag att livslängden (i timmar) för respektive glödlampa är exponentialfördelad med varians 16. Glödlampornas livslängder antas vara oberoende.

a. Om jag för tillfället enbart har en lampa tänd, vad är sannolikheten att denna lyser om 10 timmar?
b. Antag att lampan fortfarande lyser om 5 timmar, vad är då sannolikheten att den lyser om 15 timmar (räknat från nu)?
c. Om alla fem lamporna är tända, vad är sannolikheten att minst tre av dem lyser om 10 timmar?

7.6 Antag att du äger två affärer i samma stad. De ligger i två olika områden och dagskassan skiljer sig åt något. Affär 1 har en dagskassa (i tusentals kronor) som följer en $N(20, 3)$-fördelning och affär 2 har en dagskassa (i tusentals kronor) som följer en $N(40, 5)$-fördelning. Försäljningen i respektive affär antas oberoende av försäljningen i den andra.
a. Vad är sannolikheten att dagskassan i affär 1 minst är 25000kr?
b. Vad är sannolikheten att den totala dagskassan (d.v.s. båda affärerna ihop) maximalt är 70000kr?
c. Vad är sannolikheten att dagskassan i affär 2 är 10000kr mer än dagskassan i affär 1?

7.7 Månadslönen (efter skatt) för män respektive kvinnor i Göteborg antas följa normalfördelningar. Männens lön antas vara $N(12, 1)$-fördelad och kvinnornas lön $N(10, 3)$-fördelad (båda är i tusentals kronor).

a. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald man, i Göteborg, tjänar mer än 14000kr efter skatt?

b. Vad är sannolikheten att den gemensamma inkomsten för ett par (en man och en kvinna) maximalt är 20000kr?

c. Vad är sannolikheten att mannen, i paret, tjänar maximalt 3000kr mer än kvinnan?

d. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald Göteborgare tjänar mer än 12000kr? (*Antag att det är* 55% *kvinnor och* 45% *män.*)