

FACIT (Dugga 20101102)

$$1. E[X] = -1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2+2}{3} = \boxed{0}$$

$$2. V(X) = E[X^2] - E[X]^2 \Rightarrow E[X]^2 = E[X^2] - V(X) = \\ = E[X^2] - D(X)^2 = 17 - 1^2 = 16 \Rightarrow E[X] = \sqrt{16} = \boxed{4}$$

$$3. \text{Disjunkta} \Rightarrow A \cap B = \emptyset; \text{ men } B^c = A \text{ eftersom } A \cup B = \Omega \\ (P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0} \text{ och } \boxed{P(A \cap B^c) = P(A) = 0.1}$$

$$4. \text{Oberoende} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.1 \cdot 0.9 = \boxed{0.09} \\ P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = P(A)(1 - P(B)) = 0.1 \cdot 0.1 = \boxed{0.01}$$

$$5. \text{Lagen om total sannolikhet: } P(\text{rätt svar}) = \\ = P(\text{rätt svar} | \text{frisk})P(\text{frisk}) + P(\text{rätt svar} | \text{sjuk})P(\text{sjuk}) \\ = 0.97 \cdot \frac{9}{10} + 0.99 \cdot \frac{1}{10} = 0.972 = \boxed{97.2\%}$$

6. Geometrisk fördelning (oberoende kast): Pga oberoende så får vi vänta $X \sim \text{Geo}(p)$ kast efter det sjunde till nästa miss.
 $E[X] = \frac{1}{p} = 10$; alltså förväntar vi oss att hen missar det 17:e kastet nästa gång ($7+10=17$)

$$7. E[X] = \mu \Rightarrow E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}(E[X]-\mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

$$V(X) = \sigma^2 \Rightarrow V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \Rightarrow D(Z) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{Z \sim N(0, 1)}$$