Statistik för Lärare 2006
Tentamen

Onsdag 20 december 2006, kl: 8.30-13.30
Examinator och jour: Johan Tykesson, tel 0703-182096.
Hjälpmedel: Formelsamling som delas ut tillsammans med tentamenstesen och valfri miniräknare med tomt minne.
Max: 30p, Godkänd: 12p, Väl Godkänd: 21p.
Till poängen på tentamen läggs eventuella bonuspoäng.

OBS!: Lösningar skall redovisas till varje uppgift.
OBS!: Text på två sidor.

Rättningsprotkoll anslås senast 3 veckor efter tentamen.

---

1. Antag X är en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion
$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2, & 2 < x < 5; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$
där c är en konstant.
   (a) (1.5p.) Vad är c?
   (b) (1.5p.) Beräkna $\mathbf{E}(X)$.

2. (a) (2p.) Låt X=längden hos slumpmässigt utvald svensk kvinna. Antag X normalfördelad med väntevärde 169 cm och standardavvikelse 10 cm (dvs. $X \sim N(169, 10)$). Beräkna sannolikheten att X är mindre än 178 cm.
   (b) (1p.) Nämn en sak som gör att antagandet att X har en normalfördelning inte är helt realistiskt.

3. Jan spelar handboll. Antag att han får exakt 5 målchanser på en match. Antag också målchanserna är oberoende av varandra och varje målchans resulterar i mål med sannolikhet 0.8
   (a) (1p.) Vad är det förväntade antal mål som Jan gör på en match?
   (b) (1p.) Vad är sannolikheten att Jan gör högst 3 mål på en match?
   (c) (1p.) Vad är sannolikheten att Jan gör fler än 3 mål på en match?

4. (4p.) Antag 10% av alla människor bär på ett visst virus. Man utvecklar ett test för att upptäcka viruset. Om man använder testet på en person med viruset så ger testet positivt utslag (dvs testet upptäcker viruset) med sannolikhet 86%. Om man använder testet på en person som inte har viruset så ger testet positivt utslag med sannolikhet 4%. Vad är sannolikheten att en person har viruset givet att testet ger positivt utslag?

5. (4p.) Ett företag har konstruerat ett nytt däck för racercyklar, och man vill undersöka om det nya däcket är mer hållbart än företagets förra däck. Låt X vara sträckan som ett slumpmässigt utvalt däck av den gamla sorten håller innan det drabbas av sin första punktering, och låt Y vara sträckan som ett slumpmässigt utvalt däck av den nya sorten håller innan det drabbas av sin första punktering. Vi antar att $X \sim N(\mu_x, \sigma)$ och $Y \sim N(\mu_y, \sigma)$, dvs X och Y är normalfördelade med olika väntevärden men med samma varians. Antag också att σ är okänt. Vi testar 12 slumpmässigt utvalda däck av den gamla sorten och observerar stickprovsmedelvärdet $\bar{x} = 1200$ kilometer samt stickprovsstandardavvikelsen $s_x = 100$ kilometer. Av den nya sorten testar vi 11 slumpmässigt utvalda däck och observerar $\bar{y} = 1450$ kilometer och $s_y = 150$ kilometer. Beräkna ett 95% konfidensintervall för $\mu_x - \mu_y$. Hur skall man tolka det beräknade konfidensintervallet?

6. (3p.) Man undersöker om en enkrona är symmetrisk eller inte. Man gör 100 oberoende kast med myntet och man får klave 45 gånger och krona 55 gånger. Låt p vara sannolikheten att man får klave med ett kast. Beräkna ett 99% konfidensintervall för p. Kan man förkasta hypotesen $H_0 : p = 1/2$ för hypotesen $H_1 : p \neq 1/2$ på nivå $\alpha = 0.01$?

7. (3p.) Formulera och bevisa lagen om total sannolikhet.

8. (3p.) Antag $X_1, ..., X_n$ är oberoende stokastiska variabler och att de har samma fördelning. Antag deras väntevärde är μ och deras varians är σ^2. Visa att om $\bar{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$ så är $\mathbf{E}(\bar{X}) = \mu$ och $\mathbf{V}(\bar{X}) = \sigma^2/n$.

9. (4p.) Betrakta följande två spel:

   Spel A: i en urna ligger sju gröna bollar och en röd. Man drar en boll, och lägger tillbaka den igen. Man låter X vara antalet dragningar till och med första gången man får den röda bollen. Man vinner $10X$ kronor.

   Spel B: man kastar en tärning sex gånger, och vinner c kronor om man inte får någon sexa på dessa 6 kast, och $c/2$ kronor om man inte får någon fyra. I övriga fall vinner man 0 kronor.

   Bestäm konstanten c så att den förväntade vinsten blir samma i bägge spelen.