ALGEBRA OCH TALTEORI VÅREN 2006

Inlämningsuppifter C

Förutom din redovisnings uppgift skall du välja att svara på minst

1. Låt $p \in \mathbb{Z}$ vara ett primtal.

   (a) Hur löser man en godtycklig andragradsekvation i $\mathbb{Z}_p$? Ge kriterier för när ekvationen är lösbar.

   (b) Ge exempel på en andragradsekvation $x^2 + bx + c = 0$ med $b \neq 0$ och som saknar lösningar i ett $\mathbb{Z}_{6491}$.

   (c) Ge exempel på en andragradsekvation som har lösningar i $\mathbb{Z}_{6491}$ och visa hur man metodiskt tittar dess lösningar. (5)

2. Titta på decimalutvecklingen i kvoten $\frac{1}{p}$, för olika primtal $p \geq 7$. Om man vill räkna i matlab kan man ha nytta av kommandot *format long*.

   (a) Ge periodlängden för några utvalda p.

   (b) Hur lång är perioden som längst, i relation till p?

   (c) Beräkna ordningen $e_p(10)$ i $\mathbb{Z}_p^*$ för samma primtal p som du använt i (a) ovan.

   (d) Förklara sambandet mellan svaren i (a) och (c) ovan.

   (e) Använd ditt svar i (c) för att hitta två primtal $p > 12$ för vilka 10 är en primitiv rot i $\mathbb{Z}_p$.

   (f) Tag en period i decimal utvecklingen och summera först halvan av siffror med andra halvan av siffror, dvs i fallet $p = 7$ summera $142+857$. Ser du något mönster? Ge en förklaring till fenomenet. (10)

3. Låt $p = 23$

   (a) För vilka högerled b kan man lösa ekvationen $2^n = b$ i $\mathbb{Z}_{23}$?

   (b) Visa att mängden av höger led som gör ekvationen ovan lösbar utgör en grupp med avseende på multiplikation.

   (c) Välj ut en primitiv rot i $\mathbb{Z}_{23}^*$ och gör en logaritmtabell (indextabell).

   (d) Det finns ett samband mellan logaritmen (index) av ett tal och logaritmen (index) av talets invers. Ge sambandet och förklara varför detta samband gäller.

   (e) Använd tabellen för att karakterisera de högerled b i (a) ovan som ger en lösbar ekvation.

   (f) Finns det någon lösning till ekvationen $51x^{90} \equiv 9$ i $\mathbb{Z}_{23}$? (11)

4. Läs artikeln om konsten att rita n-uddiga stjärnor utan att lyfta pennan.

   (a) Finn formeln för antalet n-uddiga stjärnor som jag täckt över i artikeln och argumentera för att den är rätt.

(b) Det går enligt artikeln ej att rita en 6-uddig stjärna utan att lyfta pennan. Ge en lista på alla de tal n sådana att det ej går att rita en n-uddig stjärna utan att lyfta pennan.

(c) Ge exempel på fyra tal som inte motsvarar antalet sätt någon n-uddig stjärna kan ritas.

(d) Ge två exempel på n som gör att man kan rita precis 3 olika n-uddiga stjärnor. Rita dem?

(e) Karakterisera alla tal n som inte motsvarar antalet sätt som något n-uddig stjärna kan ritas. (9)

5. Hitta alla heltal x och n som är satisfierar ekvationen $x^2 + 615 = 2^n$. Ett tips är att börja betrakta ekvationen i $\mathbb{Z}_3$ och se vad det säger om n.

6. Låt $p \in \mathbb{Z}$ vara ett primtal. Titta på kvoter $\frac{p}{a}$ för $0 < a < p$. Varje sådan kvot kan skrivas som en kedjebråksutveckling

$$\frac{p}{q} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}}} \quad \text{där } a_i \geq 2\ \forall i.$$

Man betecknar högerledet på kortform $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle$. T ex gäller att

$$\frac{7}{5} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3}} = \langle 2, 2, 3 \rangle\,.$$

(a) Gör listor på kedjebråksutvecklingar i fallet $p = 13$ för alla $0 < a < 13$.

(b) Kan du se några mönster eller samband? Kan t ex detta hjälpa dig räkna ut inversen till ett element i $\mathbb{Z}_p$?

(c) Gör funktioner i ett datorprogram i tex matlab som ger kedjebråksutveckling på ovanstående form av kvoter och omvänt.

(d) Använd ditt datorprogram för att ge inversen till 1123 i $\mathbb{Z}_{6529}$.

(e) Använd ditt datorprogram för att utröna vad kedjebråksutvecklingen av kvoten av två, på varandra följande, Fibonaccital blir? (7)

7. Studera pentagontal, dvs tal som uppkommer som antalet prickar i en pentagon (se bilder på sidan 215 i boken).

(a) Finn en formel för pentagontalen, dvs en funktion $f(n)$ som ger n-te pentagontalet.

(b) Bevisa ett din formel är korrekt.

(c) Ge det 100:ade pentagontalet.

(d) Finn, med tanke- eller datorkraft, tre tal som både är pentagontal och triangeltal. (7)

8. För några år sedan slogs världen av häpnad när några unga amanuenser i Indien lyckades producera en mycket effektiv metod att testa om ett tal är ett primtal. Lär de tre första kapitlen i artikeln och njut av att ni känner till så många av begreppen.

(a) Lemma 2.1 säger dom är en generalisering av Fermats lillas sats. På vilket sätt är den det? Kan man t ex få ut vår vanliga FLS som en följd av lemmat?

(b) Testa lemmats påstående på fyra olika värden på n, två då det är ett primtal och två då det är sammansatt. Kommentera hur ditt resultat förhåller sig till lemmats påstående.

(c) Beviset är kortfattat. Genomför argumenten mer utförligt så som du tycker en föreläsare skulle förklarat det för dig.

(d) Studera deras algoritm, som finns i början på kapitel 4. Prova att genomföra algoritmen på ett tal, tex $n = 5$? I de steg som du inte vet vad det betyder eller hur man skall räkna, så redogör så tydligt som möjligt vad det är du tror är det som saknas dig. (10)