MATEMATIK
Göteborgs universitet
TW

17 januari 2006, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: miniräknare
Tel: Marcus Warfheimer, 0762-72 18 61

Tentamen i LMA320 och MAL600, flervariabelanalys

Var noga med motiveringarna!

1. Bestäm a, b och c så att ytan $z^3 - 6xyz + ax^3 + by^2 + c = 0$ innehåller punkten $(1, 1, 1)$ och dess tangentplan i punkten är parallellt med xy-planet.

2. (a) Transformera differentialekvationen $xz'_x + yz'_y = z,\ x, y > 0$, genom att införa nya variabler $u = \frac{x}{y},\ v = xy$. (2p)

   (b) Den transformerade ekvationen innehåller endast z och variabeln v och kan lösas med integrerande faktor eller genom att den är separabel. Utför detta och uttryck sedan lösningen i variablerna x och y, alltså lösningen till den givna ekvationen. (2p)

3. Motivera att funktionen $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$ har ett största och ett minsta värde och bestäm dessa.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = xy$ då $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} = 1,\ x, y > 0$.

5. Beräkna $\displaystyle\iint_K \frac{(x + y)^2}{1 + (x - y)^2}\, dxdy$, där K är kvadraten med hörn $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$.

6. Beräkna $\displaystyle\iiint_D \frac{x}{1 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, där D ges av $y^2 + z^2 \leq x^2 \leq 2(y^2 + z^2) \leq 2,\ x \geq 0$.

7. Beräkna $\displaystyle\int_\gamma y^2\, dx + x^2\, dy$, där γ är ett varv i positiv led runt det ändliga område i xy-planet som begränsas av $y = 2x$ och $y = x^2$.

8. (a) Definiera begreppet differentierbarhet för en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (0.5p)

   (b) Visa att om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar så är f differentierbar. (2.5p)

Varje uppgift utom nr 2 ger max 3 poäng.
För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng.

Tentan beräknas vara färdigrättad tisdagen den 24 januari kl 10.00, varefter resultat kan fås på tel. 772 3509. Tentor kan hämtas på expeditionen varje vardag 8.30–13.00.