LMA320 Flervariabelanalys 27 maj 05

1. $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2=9$, $\quad z = x^4+y^4-x^3+8y = g(x,y)$

$\nabla f(2,-1,1) = (2x,4y,6z)_{(2,-1,1)} = (4,-4,6) = 2(2,-2,3)$;

tangentplan i $(2,-1,1)$ har ekv.

$2(x-2)-2(y+1)+3(z-1)=0 \iff 2x-2y+3z=9.$

$\nabla g(2,-1) = (4x^3-3x^2, 4y^3+8)_{(2,-1)} = (20,4)$; tangentplan i $(2,-1,1)$

$z-1 = 20(x-2)+4(y+1) \iff 20x+4y-z=35.$

(Kan också behandlas som nivåyta $x^4+y^4-x^3+8y-z=0$.)

2. a) $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ $\quad z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y z'_u + \frac{1}{y} z'_v$

$\quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x z'_u - \frac{x}{y^2} z'_v$

$x z'_x - y z'_y = 2x^2 \iff (xy-yx)z'_u + \left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\right)z'_v = 2x^2 \iff 2\frac{x}{y} z'_v = 2x^2$

$x,y>0$ $\quad \iff z'_v = xy = u \iff z(u,v) = uv + f(u) \iff z(x,y) = x^2+f(xy)$

b) $x = z(x,1) = x^2+f(x) \Rightarrow f(x) = x-x^2 \Rightarrow z(x,y) = x^2+xy-x^2y^2.$

3. $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$

$\begin{cases} f'_x = e^{-x^2-y^2} - 2x(x+y)e^{-x^2-y^2} = (1-2x(x+y))e^{-x^2-y^2} \\ f'_y = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\, = (1-2y(x+y))e^{-x^2-y^2} \end{cases}$

$f'_x = f'_y = 0$ ger $2x(x+y) = 1 = 2y(x+y)$ så $y=x$ och $4x^2=1$, dvs. $y=x=\pm\frac{1}{2}$

	(x,y)	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
f''_{xx}	$(-4x-2y)e^{-x^2-y^2} - 2x f'_x$	$-3e^{-\frac{1}{2}}$	$3e^{-\frac{1}{2}}$
f''_{xy}	$-2x e^{-x^2-y^2} - 2y f'_x$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$
f''_{yy}	$(-2x-4y)e^{-x^2-y^2} - 2y f'_y$	$-3e^{-\frac{1}{2}}<0$	$3e^{-\frac{1}{2}}>0$
$f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2$		$8e^{-1}>0$ lok.max. $e^{-\frac{1}{2}}$	$8e^{-1}>0$ lok min. $-e^{-\frac{1}{2}}$

Att dessa är max resp. min följer även av att $f(x,y)\to 0$ då $x^2+y^2\to\infty$ så största och minsta värde måste antas i stationära punkter och det finns bara två sådana.

4. $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$, $\quad x^2+y^2 \le 4$

Inre punkter: $\begin{cases} f'_x = \frac{1+x^2+y^2-x\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \quad (1) \\ f'_y = \frac{-x\cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \iff \begin{cases} x=0 \text{ omöjligt i (1)} \\ y=0 \text{ (1) ger } x=\pm 1 \end{cases} \end{cases}$

*) Randen: $x^2+y^2=4$ ger $f(x,y) = \frac{x}{1+4} = \frac{x}{5}$ som tar värden i $[-\frac{2}{5},\frac{2}{5}]$.

Alltså $f_{max} = f(1,0) = \frac{1}{2}$, $f_{min} = f(-1,0) = -\frac{1}{2}$.

*) (eller $\nabla f \parallel \nabla(x^2+y^2) \iff (1-x^2+y^2, -2xy) \parallel (x,y) \iff y(1-x^2+y^2) = x(-2xy) \iff y(1+x^2+y^2)=0 \iff y=0$)

5 $D: 3<x-y<4,\ 9<x^2-y^2<16 \Longleftrightarrow D: 3<u<4,\ 9<uv<16$

$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases}$ $\quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \iint_{D'} v\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_3^4 du \int_{\frac{9}{u}}^{\frac{16}{u}} v\,dv = \frac{1}{2}\int_3^4 \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{\frac{9}{u}}^{\frac{16}{u}} du =$

$= \frac{1}{4}\int_3^4 \left(\frac{256}{u^2}-\frac{81}{u^2}\right)du = \frac{175}{4}\int_3^4 \frac{1}{u^2}\,du = \frac{175}{4}\left[-\frac{1}{u}\right]_3^4 = \frac{175}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{175}{4}\cdot\frac{1}{12} = \frac{175}{48}$

Alt. $\begin{cases} u=x-y \\ v=x^2-y^2 \end{cases}$ $\quad x+y=\frac{v}{u} \quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = 2x-2y = 2u$

$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \iint_{D''} \frac{v}{u}\cdot\frac{1}{2u}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{1}{u^2}\,du \int_9^{16} v\,dv = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot(256-81) = \frac{175}{48}$

6. $D: x^2+y^2+z^2\le 4,\ y,z\ge 0 \Longleftrightarrow 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\ (x,y)\in E: x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0$

$\iiint_D \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iint_E \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dz\right)dx\,dy = \iint_E \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2+z^2)\right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx\,dy =$

$= \frac{1}{2}\iint_E (\ln 5-\ln(1+x^2+y^2))\,dx\,dy = \frac{1}{2}\ln 5\cdot\mu(E) - \frac{1}{2}\int_0^\pi d\varphi\int_0^2 r\ln(1+r^2)\,dr =$

$= \{t=1+r^2;\ dt=2r\,dr\} = \frac{1}{2}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\int_1^5 \ln t\cdot\frac{1}{2}\,dt = \pi\ln 5 - \frac{\pi}{4}\left[t\ln t - t\right]_1^5 =$

$= \pi\ln 5 - \frac{\pi}{4}(5\ln 5 - 5 + 1) = \pi - \frac{\pi}{4}\ln 5$

Alt. Rymdpolärt; $D \Longleftrightarrow D'$; $0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\pi$

$\iiint_D \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} \frac{r\cos\theta}{1+r^2}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$

$= \int_0^\pi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^2 \frac{r^3}{1+r^2}\,dr = \pi\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^2 \left(r-\frac{r}{1+r^2}\right)dr =$

$= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^2 = \frac{\pi}{4}(4-\ln 5)$

7. a) $\nabla U = \vec{F} \Longleftrightarrow U'_x = \frac{1}{x^3} + xe^{-x^2-y^2}$ (1), $U'_y = \frac{y}{(y^2+1)^2} + ye^{-x^2-y^2}$ (2)

(1) $\Longleftrightarrow U = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2-y^2} + f(y) \Longleftrightarrow U'_y = ye^{-x^2-y^2} + f'(y)$

Så (2) är uppfylld om vi tar $f(y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2+1}$ så

$U(x,y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + e^{-x^2-y^2} + \frac{1}{y^2+1}\right)$

b) $\int_{(\sqrt{2},0)}^{(1,1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(1,1) - U(\sqrt{2},0) = -\frac{1}{2}\left(1 + e^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - e^{-2} - 1\right) = 0.$

Att $\vec{F}$ är konservativt följer också av att $Q'_x = P'_y$ i det enkelt sammanhängande området $x>0$. För att lösa b) kan man därför välja vägen bestående av två axelparallella sträckor från $(\sqrt{2},0)$ till $(1,1)$ om man inte vill beräkna U.

8. Obs att i "formulära" ingår att ange förutsättningar.