LMA320 Flervariabelanalys 5 juni 06

1. Låt $f(x,y,z)=x^2+2y^2$, $g(x,y,z)=xy+yz$.
$f(3,2,-1)=9+8=17$, $g(3,2,-1)=6-2=4$, så $(3,2,-1)$ ligger på skärningskurvan mellan $x^2+2y^2=17$ och $xy+yz=4$.

$\nabla f(3,2,-1)=(2x,4y,0)_{(3,2,-1)}=(2\cdot 3,4\cdot 2,0)=2(3,4,0)$

$\nabla g(3,2,-1)=(y,x+z,y)_{(3,2,-1)}=(2,2,2)=2(1,1,1)$

En tangentvektor till kurvan är därför

$\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}$ så tangentens ekv. $\begin{cases}x=3+4t\\y=2-3t\\z=-1-t\end{cases}$

2. $\begin{cases}u=x^2+y^2\\v=\frac{x}{y}\end{cases}$ $\quad z'_x=z'_u u'_x+z'_v v'_x=2xz'_u+\frac{1}{y}z'_v$

$\quad z'_y=z'_u u'_y+z'_v v'_y=2yz'_u-\frac{x}{y^2}z'_v$

(PDE) $z=\frac{y^2}{x}z'_x-yz'_y=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)z'_v=\left(\frac{1}{v}+v\right)z'_v=$

$=\frac{1+v^2}{v}z'_v \iff z'_v-\frac{v}{v^2+1}z=0.$

Int. faktor $e^{\int -\frac{v}{v^2+1}dv}=e^{-\frac{1}{2}\ln(v^2+1)}=\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}$

så (PDE) $\iff \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}z\right)=0\iff\frac{z}{\sqrt{v^2+1}}=f(u)$, f C^1

Så $z=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}\,f(x^2+y^2)=\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}\,f(x^2+y^2)=\frac{1}{y}g(x^2+y^2)$

3. $f(x,y)=(x^2+y)e^{-x^2-y^2}\to 0$ då $x^2+y^2\to\infty$ så max och min antas i stationära punkter.

$f'_x=2x-2x(x^2+y)=0\iff x=0$ el. $x^2+y=1$

$f'_y=1-2y(x^2+y)=0\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad y=\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}}$ $\qquad f_{min}=-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}}$

$f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}\sqrt{e}}=f_{max}$ ty $(\sqrt[4]{e})^4=e<4=(\sqrt{2})^4$

4. Max och min av $f(x,y) = xy$

då $g(x,y) = x^4 + x^2y^2 + 4y^4 \leq 160$.

Inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = y \\ f'_y = x \end{cases} \qquad \nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0; \ \underline{f(0,0) = 0.}$$

Randen:

$\nabla g = (4x^3 + 2xy^2, 2x^2y + 16y^3)$ så

$$\nabla f /\!/ \nabla g \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} y & 2x^3 + xy^2 \\ x & x^2y + 8y^3 \end{vmatrix} = 8y^4 - 2x^4$$

$\Leftrightarrow x^2 = 2y^2$, vilket insatt i $g(x,y) = 160$

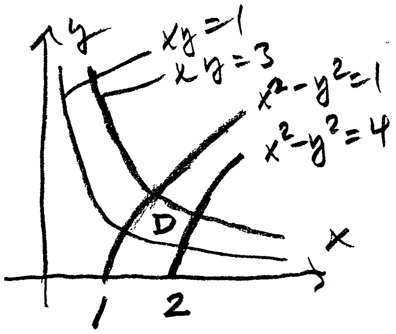
ger $(4+2+4)y^4 = 160 \Leftrightarrow y = \pm 2 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

$f(\pm(2\sqrt{2}, 2)) = 4\sqrt{2} = \max$, $f(\pm(2\sqrt{2}, -2)) = -4\sqrt{2} = \min$.

5. Polära koordinater ger

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}} \, dr = \pi \left[-(1+r^2)^{-1/2} \right]_0^\infty = \pi.$$

6.



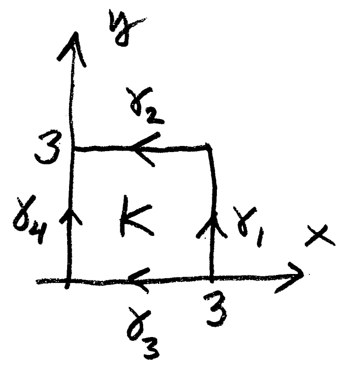
Låt $u = x^2 - y^2$, $v = xy$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\iint_D (x^4 - y^4) \, dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_1^3 \frac{x^4 - y^4}{2(x^2+y^2)} \, dv \right) du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 \left(\int_1^3 (x^2 - y^2) \, dv \right) du = \frac{1}{2} \int_1^4 u \, du \int_1^3 dv = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_1^4 = \frac{15}{2}$$

7.



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ så $\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$;

på γ_1 är $x=3$, $dx=0$ och

på γ_2 är $y=3$, $dy=0$, så

$$\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int_0^3 6y\,dy + \int_3^0 (x^2-9)\,dx =$$

$$= \Big[3y^2\Big]_0^3 + \Big[\tfrac{1}{3}x^3 - 9x\Big]_3^0 = 27 - 9 + 27 = 45.$$

Alternativt kan man använda att $\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4$ går ett varv runt K i positiv led, så Greens formel ger

$\int_\gamma - \int_{\gamma_3+\gamma_4} = \iint_K$; $y=0$, $dy=0$ på γ_3, $x=0$, $dx=0$ på γ_4

så
$$\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int_3^0 x^2\,dx + \int_0^3 0\,dy + \iint_K (2y+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \Big[\tfrac{1}{3}x^3\Big]_3^0 + \int_0^3 dx \int_0^3 4y\,dy = -9 + 3\Big[2y^2\Big]_0^3 = -9 + 3\cdot 18 = 45.$$

8. $f(x,y) = \dfrac{xy^5}{x^2+y^6}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a) $f(x,0) = 0$ för alla x, så $f'_x(x,0) = 0$ för alla x.

b) $f'_x(x,y) = y^5 \dfrac{x^2+y^6-x\cdot 2x}{(x^2+y^6)^2} = y^5 \dfrac{y^6-x^2}{(x^2+y^6)^2}$

c) $f'_x(0,y) = y^5 \cdot \dfrac{y^6}{(y^6)^2} = \dfrac{1}{y}$ saknar gränsvärde då $y \to 0$.

Anm. $f(0,y) = 0$ så $f'_y(0,y) = 0$ för alla y.

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|\,|y|^5}{(x^2+y^6)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{|x|\,|y|^3}{x^2+y^6} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |y| \to 0, \ (x,y) \to (0,0),$$

så f är diffbar i $(0,0)$.