Matematiska vetenskaper
CTH & GU
P. Sjögren 2006

Övningar i FUNKTIONALANALYS

1. Consider the space $X = C^1[0,1]$ of continuously differentiable functions on $[0,1]$ with one-sided derivatives at the endpoints. Show that X is not a Banach spaces if it is given the norm $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$. Cf. Folland exerc. 5.1.9 p. 155.

2. Let X be a normed vector space. Prove the inequality $|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x-y\|$. Conclude that the norm is continuous on X, in the sense that $x_j \to x$ implies $\|x_j\| \to \|x\|$. Cf. Folland exerc. 5.1.1 p. 154.

3. Visa att ett ändligt-dimensionellt delrum av ett normerat linjärt rum är slutet. Ledning: kalla delrummet V, och anta att en följd ur V konvergerar mot någon vektor i X. Då är följden Cauchy och därför konvergent i V.

4. If equality holds in the triangle inequality of a normed space, do the vectors have to be parallel? More precisely, does $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ imply that one of the vectors is a scalar multiple of the other? Answer the question for ℓ^1, ℓ^2 and ℓ^∞.

5. Let $w = (w_k)$ be a sequence of positive numbers. Define a measure m_w on $\mathbb{N}$ by placing the mass w_k at k for $k = 1, 2, \dots$. Then $L^p(m_w)$ is written ℓ^p_w and called weighted ℓ^p. Prove that ℓ^p_w is isometrically isomorphic with ℓ^p for $1 \le p \le \infty$.

6. Consider real, two-dimensional ℓ^p, which is $\mathbb{R}^2$ with the norm
$$\|(x_1, x_2)\| = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty,$$
with the usual interpretation for $p = \infty$. Sketch the unit ball for several values of p, for instance $p = 1,\ 3/2,\ 2,\ 3,\ \infty$. For which p is the unit ball strictly convex, in the sense that $\|x\|, \|y\| \le 1$ and $x \ne y$ imply $\|(x+y)/2\| \le 1$?

7. (Packing of balls) Place inside the unit ball of ℓ^p, $1 \le p \le \infty$, infinitely many pairwise disjoint balls having the same positive radius. Conclude that the (closed) unit ball cannot be compact (for the definition of compact, see the following problem).

Matematiska inst
CTH & GU
P. Sjögren 2006

Övningar i FUNKTIONALANALYS

8. Låt M vara ett fullständigt metriskt rum och K en delmängd av M. Visa att följande är ekvivalent.

   (i) K är kompakt, dvs. varje öppen övertäckning av K har en ändlig delövertäckning.

   (ii) K är följdkompakt, dvs. varje följd i K har en delföljd som konvergerar mot en punkt i K.

   (iii) K är sluten och dessutom totalt begränsad, dvs man kan för varje $r > 0$ täcka K med ändligt många klot av radie r.

9. (Generalisering av övning 7) Låt X vara ett oändligtdimensionellt normerat rum.
   a) Om $r > 0$ är litet, visa att man i enhetsklotet i X kan placera oändligt många parvis disjunkta klot av radie r. Använd t ex Follands övning 5.1.12(b) sid 156, kombinerad med övning 3 ovan.
   b) Dra slutsatsen att ett klot i X aldrig är kompakt..

10. (Extension by continuity) Let M be a dense subspace of the normed space X. Here dense means that $\overline{M} = X$. Let Y be a Banach space. Show that any bounded linear operator $T : M \to Y$ has a unique extension to a bounded linear operator $X \to Y$.

11. a) Prove that $\|.\|_p$ is not a norm for $0 < p < 1$, using, say, Lebesgue measure in $[0, 1]$.
    b) Prove that it is not even equivalent to a norm.

12. Let $1 \le p < s < r \le \infty$. Prove the inclusions
    $$L^p \cap L^r \subset L^s \subset L^p + L^r.$$
    The measure is arbitrary. Compare with Folland, exerc. 6.1.3,4 p. 186.

13. Consider convergence in L^p norm with $1 \le p < \infty$ and a.e. convergence, for some measure of your choice. Prove that neither implies the other.

Matematiska inst
CTH & GU
P. Sjögren 2006

Övningar i FUNKTIONALANALYS

14. With $1 \leq p < \infty$, assume that the function sequence f_j converges to f in L^p for some measure. Prove that there is a subsequence which converges a.e. to f.

15. Assume that the function g is measurable and a.e. finite, with respect to a measure μ, but that $g \notin L^q(\mu)$. Here $1 < q < \infty$, and we let p denote the dual exponent. Find a function $f \in L^p(\mu)$ for which $fg \notin L^1(\mu)$

16. Prove that ℓ^∞ and $L^\infty[0,1]$ are not separable. Hint: Find an uncountable set of points, all at mutual distances at least r, for some $r > 0$. In the first case, cf. exercise 7.