LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN
I MAL 200 del 4 1998-06-04

Vi ger hänvisningar till kurslitteraturen när det gäller teorifrågor dvs definitioner, satser och deras bevis.

1. **Ge exempel på**

   (a) Ett reellt tal som inte är rationellt.

   (b) En ring som inte är en kropp.

   (c) En relation som inte är transitiv.

   Motivera mycket noga Dina svar!

   (a) $\sqrt{2}$ är ett reellt tal som inte är rationellt. Om $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, där p och q är heltal, så är $2q^2 = p^2$, vilket visar att det finns ett udda antal primfaktorer 2 till vänster och ett jämnt antal sådana faktorer till höger. Detta strider mot aritmetikens fundamentalsats.

   (b) Heltalen $\mathbb{Z}$ är ett exempel på en ring som inte är en kropp. I en kropp har varje nollskilt element en invers, men talet 2 saknar invers i $\mathbb{Z}$ dvs ekvationen $2x = 1$ saknar heltaliga lösningar.

   (c) Låt M vara mängden av alla människor. Låt $x, y \in M$ och definiera $x \sim y$ om x och y känner varandra. Då kan det vara så att $x \sim y$ och $y \sim z$, medan $x \not\sim z$.

2. **Faktoruppdela polynomet $X^4 - 2X^2 - 15$ i produkt av irreducibla polynom med koefficienter i $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ (dvs i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$).**

   Låt $X^2 = Y$. Då är

   $$X^4 - 2X^2 - 15 = Y^2 - 2Y - 15 = (Y + 3)(Y - 5) = (X^2 + 3)(X^2 - 5)$$

   eftersom ekvationen $Y^2 - 2Y - 15 = 0$ har två lösningar -3 och 5.

   (Man kan också faktoruppdela polynomet $X^4 - 2X^2 - 15$ genom kvadratkomplettering: $X^4 - 2X^2 - 15 = X^4 - 2X^2 + 1 - 16 = (X^2 - 1)^2 - 4^2 = (X^2 + 3)(X^2 - 5)$).

   Detta är en faktoruppdelning i två irreducibla polynom med rationella koefficienter. $X^2 + 3$ och $X^2 - 5$ är irreducibla i $\mathbb{Q}[X]$ därför att de saknar rationella nollställen. Vi har $X^4 - 2X^2 - 15 = (X^2 + 3)(X^2 - 5) = (X^2 + 3)(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5})$ om vi tillåter reella koefficienter. Polynomen i produkten är irreducibla i $\mathbb{R}[X]$ därför att $X^2 + 3$ saknar reella nollställen och de övriga faktorerna har grad 1. Slutligen är $X^4 - 2X^2 - 15 = (X^2 + 3)(X^2 - 5) = (X + i\sqrt{3})(X - i\sqrt{3})(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5})$ om vi tillåter komplexa koefficienter. Alla faktorer har grad 1 och är därmed irreducibla i $\mathbb{C}[X]$.

3. **Låt M vara mängden av heltalen och definiera operationen "$*$" på M så att:**

   $$m * n = m + (-1)^m n$$

   då $m, n \in M$. Är denna operation kommutativ? Associativ? Finns det ett neutralt element? Bestäm alla element i M som har invers.

   Observera att $m * n = m + n$ då m är jämnt, och $m * n = m - n$ då m är udda.

   Operationen är inte kommutativ. T ex är $2 * 3 = 2 + 3 = 5$ och $3 * 2 = 3 - 2 = 1$ dvs $2 * 3 \neq 3 * 2$.

   Operationen är associativ dvs $(m * n) * p = m * (n * p)$ för alla heltal m, n, p. Först välj m jämnt. Då är

   $$\text{VL} = (m * n) * p = (m + n) * p = m + n + (-1)^{m+n} p$$

   och

   $$\text{HL} = m * (n * p) = m * (n + (-1)^n p) = m + n + (-1)^n p$$

   dvs VL = HL ty $(-1)^{m+n} = (-1)^n$ (m är jämnt). Antag nu att m är udda. Då är

$$\mathrm{VL} = (m * n) * p = (m - n) * p = m - n + (-1)^{m-n} p$$

och

$$\mathrm{HL} = m * (n * p) = m * (n + (-1)^n p) = m + (-1)^m (n + (-1)^n p) = m - n + (-1)^{m+n} p,$$

dvs VL = HL ty $(-1)^{m-n} = (-1)^{m+n}$ (talen $m - n$ och $m + n$ är samtidigt udda eller samtidigt jämna).

Det neutrala elementet är 0 ty $m * 0 = m$ och $0 * m = m$ för varje heltal m.

Ett heltal m har invers om det finns ett heltal x så att $m * x = 0$ och $x * m = 0$. Om m är jämnt så ger $m * x = m + x = 0$ så att $x = -m$ och $x * m = (-m) * m = -m + m = 0$. Om m är udda så ger $m * x = m - x = 0$ så att $x = m$ och $x * m = m * m = m - m = 0$. Alltså har varje element invers.

4. **Som bekant kan rationella tal definieras som ekvivalensklasser av relationen**

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

på mängden av alla par (a, b), där a, b, c, d är heltal och $bd \neq 0$.

(a) Kontrollera att relationen "$\sim$" verkligen är en ekvivalensrelation.

(b) Välj exempel på två representanter för ekvivalensklassen av $\frac{2}{3}$ och två representanter för ekvivalensklassen av $\frac{5}{8}$. Utnyttja Dina exempel för att förklara att addition av rationella tal kan uföras med helt godtyckliga representanter av dessa klasser.

(a) $(a, b) \sim (a, b)$ ty $ab = ab$ så att relationen är reflexiv.

$(a, b) \sim (c, d)$ ger $(c, d) \sim (a, b)$ ty $ad = bc$ ger $cb = da$ så att relationen är symmetrisk.

$(a, b) \sim (c, d)$ och $(c, d) \sim (e, f)$ ger $(a, b) \sim (e, f)$ ty $ad = bc$ och $cf = de$ ger $af = be$. Bevis: $adf = bcf = bde$ så att $af = be$ ty $d \neq 0$. Detta visar att relationen är transitiv.

(b) Ekvivalensklassen av $\frac{2}{3}$ representeras t ex av paren $(2, 3)$ och $(4, 6)$. Ekvivalensklassen av $\frac{5}{8}$ representeras t ex av paren $(5, 8)$ och $(10, 16)$. Summan av talen $\frac{2}{3}$ och $\frac{5}{8}$ beror inte på representantvalet. T ex är

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 5 \cdot 3}{3 \cdot 8} = \frac{31}{24}$$

och

$$\frac{4}{6} + \frac{10}{16} = \frac{4 \cdot 16 + 10 \cdot 6}{6 \cdot 16} = \frac{124}{96},$$

vilket ger representanter för samma ekvivalensklass $(31, 24) \sim (124, 96)$ ty $31 \cdot 96 = 24 \cdot 124$.

5. **Formulera och bevisa "kordasatsen" om två kordor som skär varandra i en cirkel.**

Se kompendiet "Euklidisk geometri".

6. **I en triangel $\triangle ABC$ är medianerna utgående från A och B vinkelräta. Beräkna längden av sidan AB om $|AC| = 6$ och $|BC| = 8$.**

Låt A_1 vara mittpunkten på BC, B_1 mittpunkten på AC och M skärningspunkten av medianerna AA_1 och BB_1. Låt $x = |MA_1|$ och $y = |MB_1|$.

ras sats $|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2$ så att $|AB|^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2)$. Enligt förutsättningen är $\triangle AMB_1$ och $\triangle BMA_1$ rätvinkliga trianglar så att Pythagoras sats ger $|AM|^2 + |MB_1|^2 = |AB_1|^2$ samt $|BM|^2 + |MA_1|^2 = |BA_1|^2$ dvs $(2x)^2 + y^2 = 3^2$ samt $(2y)^2 + x^2 = 4^2$. Alltså är $5(x^2 + y^2) = 25$ (addera ekvationerna ledvis!) dvs $x^2 + y^2 = 5$. Detta ger att $|AB|^2 = 4(x^2 + y^2) = 20$ så $|AB| = 2\sqrt{5}$.

7. **(a) Formulera Fermats lilla sats för $p = 5$.**

   (b) Låt $f(k) = 1^k + 2^k + 3^k + 4^k$ (mod 5). Beräkna $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(-1), f(0)$.

   (c) Bestäm alla möjliga värden av funktionen f då $k \in \mathbb{Z}$.

   (a) Satsen säger att $5 | a^5 - a$ för varje heltal a.

   (b) $f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0, f(4) = 4, f(5) = 0, f(-1) = 0, f(0) = 4$ modulo 5.

   (c) Funktionen $f(n)$ antar endast två värden – 0 och 4. För att bevisa detta observerar vi att för varje $a = 1, 2, 3, 4$ är $a^4 = 1$ modulo 5 så att potenserna av a bildar en periodisk följd med perioden 4. Alltså återkommer också funktionens f värden med perioden 4. En sådan period börjar med $f(1)$ och slutar med $f(4)$. Observera att $a^4 = 1$ ger $a^{-1} = a^3$, vilket visar att varje negativ heltalig exponent kan ersättas med en positiv.

8. **(a) Formulera multiplikationsprincipen.**

   (b) Hur många heltal mellan 1000 och 9999 har alla siffror olika? Redogör hur Du resonerar.

   (a) Se Vretblads bok eller stencilen “Kombinatorik”.

   (b) Den första siffran kan väljas på 9 olika sätt (bland $1, 2, \ldots, 9$). Den andra kan också väljas på 9 olika sätt (bland $0, 1, 2, \ldots, 9$ med den första valda siffran struken). Den tredje siffran kan väljas på 8 olika sätt (bland $0, 1, 2, \ldots, 9$ med den första och den andra valda siffran struken). Slutligen kan den fjärde siffran väljas på 7 olika sätt. Enligt multiplikationsprincipen är antalet heltal mellan 1000 och 9999 med alla siffror olika $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.