LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN I MAL 200 del 3 1998-11-28

Vi ger hänvisningar till kurslitteraturen när det gäller teorifrågor dvs definitioner, satser och deras bevis.

1. **Låt a, b, c, d beteckna heltal. Vilka av följande påståenden är sanna? Bevisa eller ge ett motexempel!**

   (a) Om $a|b$ och $c|d$ så $a + c|b + d$.

   (b) Om a och b är udda så är talet $a + b + ab$ udda.

   (c) a och b är udda då och endast då $a + b + ab$ är udda.

   (a) Påståendet är falskt. Välj $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 9$. Man har då $2|4$ och $3|9$, men $2 + 3 = 5 \nmid 13 = 4 + 9$.

   (b) Påståendet är sant. Bevis: Låt $a = 2k + 1$ och $b = 2l + 1$, där k och l är heltal. Då är $a + b + ab = 2k + 1 + 2l + 1 + (2k + 1)(2l + 1) = 4(k + l + kl) + 3$ ett udda tal (man kan också konstatera att summan av tre udda termer a, b och ab ger ett udda tal).

   (c) Påståendet är falskt. Man har två implikationer. Den ena: Om a och b är udda så är talet $a + b + ab$ udda är sann enligt (b). Den andra: Om $a + b + ab$ är udda så är a och b udda är falsk! Tag $a = 1$ och $b = 2$. Då är summan $a + b + ab = 5$ udda, men a och b är inte udda (b är jämnt).

2. **(a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att formulera följande utsaga: Om x, y och z är heltal och $x^2 + y^2 = z^2$ så är minst ett av talen x, y och z delbart med 7.**

   (b) Formulera negationen till utsagan i (a).

   (c) Är utsagan i (a) sann eller falsk? Bevisa Ditt påstående.

   (a) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}\, [x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow (7|x \vee 7|y \vee 7|z)]$. Man kan ersätta: $7|x \vee 7|y \vee 7|z$ med $7|xyz$.

   (b) $\neg\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}\, [x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow (7|x \vee 7|y \vee 7|z)] \Leftrightarrow \exists\, x, y, z \in \mathbb{Z}\, [x^2 + y^2 = z^2 \wedge (7 \nmid x \wedge 7 \nmid y \wedge 7 \nmid z)]$. Man kan ersätta: $7 \nmid x \wedge 7 \nmid y \wedge 7 \nmid z$ med $7 \nmid xyz$.

   (c) Påståendet är falskt. T ex $3^2 + 4^2 = 5^2$, men 7 dividerar inte något av talen $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

3. **Låt A, B och C beteckna tre mängder. Rita Venn–diagram som svarar mot vänster– och högerled i likheten:**

   $$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

   Stämmer likheten? Bevisa Ditt påstående! Använd definitionerna av ”$\cup, \cap$” och “$\setminus$”.

   Rita Venn-diagram! (Vi utelämnar detta av tekniska skäl.) Dessa visar att mängderna till vänster och till höger är lika. Vi bevisar likheten:

   $$x \in VL = [A \setminus (B \cup C)] \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$

   $$x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \in (A \setminus C) \Leftrightarrow$$

   $$x \in (A \setminus B) \wedge x \in (A \setminus C) \Leftrightarrow x \in [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)] = x \in HL.$$

   Alltså är $VL = HL$.

som är störst. Bevisa Ditt påstående med hjälp av matematisk induktion.

Man får $3^1 + 4^1 = 7 < 5^1$, $3^2 + 4^2 = 5^2$, $3^3 + 4^3 < 5^3$, $3^4 + 4^4 < 5^4$. Det verkar att $3^n + 4^n < 5^n$ då $n > 2$. Vi skall visa detta påstående med matematisk induktion. Vi har redan konstaterat att påståendet gäller då $n = 3$ ("Första steget"). Nu antar vi att påståendet gäller då $n = k$, $k \geq 3$ dvs $3^k + 4^k < 5^k$, och visar att det gäller då $n = k + 1$ dvs $3^{k+1} + 4^{k+1} < 5^{k+1}$ ("Induktionssteget"). Vi har:

$$5^{k+1} = 5 \cdot 5^k > 5(3^k + 4^k) = 5 \cdot 3^k + 5 \cdot 4^k > 3 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k = 3^{k+1} + 4^{k+1}.$$

Enligt induktionsprincipen gäller olikheten $3^n + 4^n < 5^n$ för alla heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

5. **Bestäm alla heltaliga lösningar till ekvationen $3x - 7y = 20$ och välj bland dessa lösningar minst en i vilken både x och y är heltaliga kvadrater (dvs bestäm minst en lösning till den diofantiska ekvationen $3a^2 - 7b^2 = 20$).**

Man hittar lätt en lösning t ex $x_0 = 9, y_0 = 1$. Om (x, y) betecknar en godtycklig lösning så har man $3x - 7y = 3x_0 - 7y_0$ dvs $3(x - x_0) = 7(y - y_0)$. Eftersom 3 är relativt prim med 7, så är 3 en delare till $y - y_0$ dvs $y - y_0 = 3k$ för ett $k \in \mathbb{Z}$. Alltså ger likheten $3(x - x_0) = 7 \cdot 3k$ att $x = x_0 + 7k$. Vi får den allmänna lösningen $x = 9 + 7k, y = 1 + 3k, k \in \mathbb{Z}$. Samtidigt observerar vi att $a = 3$ och $b = 1$ också löser ekvationen $3a^2 - 7b^2 = 20$.

6. **(a) Vad menas med ett sammansatt tal? Ge ett exempel på en följd bestående av 100 sammansatta heltal som följer efter varandra.**

   (b) Visa att det finns oändligt många primtal.

(a) Definitionen av sammansatta heltal finner man i Vretblads bok. En följd av 100 (direkt) efterföljande heltal är t ex $101! + 2, 101! + 3, \ldots, 101! + 100, 101! + 101$.

(b) Se Vretblads bok eller stencilen om "Delbarhet och primtal".

7. **Låt z_1 och z_2 vara två komplexa tal.**

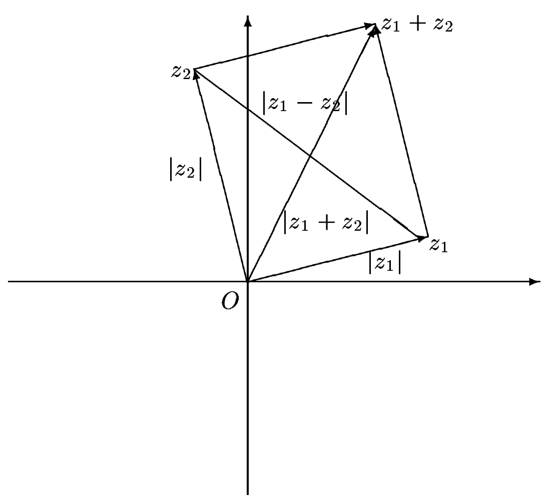
   (a) Tolka geometriskt talen $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$ och $|z_1 - z_2|$.

   (b) Ge en geometrisk tolkning av likheten:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

   (c) Bevisa att likheten i (b) gäller för godtyckliga z_1 och z_2.

(a) (Bilden är inte den bästa: z_1 och z_2 spänner upp en parallellogram.)



(b) Likheten säger att summan av kvadraterna på diagonalernas längder i en parallellogram är lika med summan av kvadraterna på alla sidornas längder.

$(z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + z_2\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

8. **Låt a och b vara två relativt prima heltal dvs SGD$(a,b) = 1$. Bevisa att SGD$(a+b, a-b) = 1$ eller 2.**

Låt $d = \mathrm{SGD}(a+b, a-b)$. d delar både $a+b$ och $a-b$. Alltså är d en delare till $(a+b)+(a-b) = 2a$ och en delare till $(a+b)-(a-b) = 2b$. Men a och b är relativt prima så att det finns heltal x och y sådana att $ax + by = 1$. Den likheten ger $2ax + 2by = 2$, vilket visar att d, som dividerar både $2a$ och $2b$, måste dividera 2. Alltså är d lika med 1 eller 2.