AVSNITT 3

INDUKTION OCH DEDUKTION

Med induktion menar man vanligen en mycket vanlig resonemangsmetod: man gör flera observationer, upptäcker ett mönster (eller något som man tror är ett mönster) och därefter formulerar man en generalisering. I många ordböcker över främmande ord i svenskan finner man följande förklaring av ordet **inducera**: "sluta från det enskilda till det allmänna". Induktion är då ett resonemang då man inducerar. Induktion förekommer mycket ofta i vardagliga sammanhang. Tänk på alla ordspråk, talesätt och bondepraktiker! De bygger oftast på många observationer och långtgående generaliseringar som t ex "En grön jul gör en vit påsk" eller "När katter och hundar äter gräs blir det oväder". Mycket ofta är dessa generaliseringar helt korrekta. Men ibland slår de fel eftersom "ingen regel utan undantag".

Hur är det i matematiska sammanhang? Induktionsmetoden används också mycket ofta för att formulära förmodanden (hypoteser). Man studerar ofta olika specialfall och försöker med hjälp av dessa få en inblick i allmänna företeelser. Detta är gemensamt för matematik och andra naturvetenskaper som t ex fysik, kemi eller biologi. Men en matematiker accepterar aldrig en argumentering som säger att något måste gälla rent allmänt därför att det gäller i alla hittills kända specialfall. Varje experimentellt resultat dvs en studie av olika specialfall måste kompletteras med ett matematiskt godtagbart resonemang. Sådana resonemang kallas vanligen "**bevis**" och bygger på **deduktion**. Ordet deduktion förklaras i ordböcker som "logisk bevisföring". I detta avsnitt försöker vi förklara vad man menar med deduktion och visa att induktion kan ge en värdefull ledning till formuleringar av matematiska resultat [†].

Innan vi börjar med exempel, låt oss notera att andra naturvetenskaper oftast bygger sina allmänna teorier deduktivt (dvs med hjälp av logisk bevisföring) från mycket omfattande observationer (experiment). Dessa teorier verifieras med hjälp av nya experiment eller andra teorier. Om man stöter på motsägelser reviderar man gällande teorier. Man kan säga att andra naturvetenskaper består av flera "lokala" delar som visserligen utvecklas deduktivt, men deras grunder har en experimentell karaktär. Matematiken har en "global" karaktär – den vilar på mycket tydliga grundförutsättningar (axiom) som utgör matematikens grun-

[†]En av de deduktiva metoderna kallas för **matematisk induktion**. Denna metod diskuterar vi i ett efterföljande avsnitt.

der. Dessa grunder har också ett experimentellt ursprung – de bygger i stor utsträckning på människans erfarenhet med uppräkning av olika föremål och med olika geometriska former. Men matematiska observationer och teorier som vi sysslar med ligger från början inom matematikens område. Därför kan man försöka deducera (dvs motivera och bevisa) matematiska påståenden med utgångspunkt från matematikens spelregler. Våra slutsatser hotas inte av motsägelser om våra utgångspunter inte strider mot varandra och bevisen är korrekta. Men att lära sig matematikens spelregler och logisk bevisföring är inte helt lätt. Det är just ett av huvudsyften med matematikundervisningen på alla nivåer.

Låt oss betrakta några exempel som visar att induktion i matematiska sammanhang kan både vara värdefull och farlig som utgångspunkt till allmänna slutsatser.

(3.1) Exempel. (a) Betrakta bråken

$$\frac{n}{n+1} \quad \text{och} \quad \frac{n+1}{n+2}$$

Vad kan man säga om storleken av dessa tal då $n = 1, 2, 3, \ldots$? Vi gör ett litet experiment genom att sätta in några värden på n: $n = 1$ ger $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$, $n = 2$ ger $\frac{2}{3}$ och $\frac{3}{4}$, $n = 3$ ger $\frac{3}{4}$ och $\frac{4}{5}$. Det verkar som att det alltid gäller att

$$(*) \qquad \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}.$$

Är detta sant? Troligen. Men vi måste bevisa den olikheten därför att vi inte har någon garanti att den gäller för alla naturliga tal n. Genom att multiplicera bägge leden i olikheten ovan med det positiva talet $(n + 1)(n + 2)$ får vi att den är är ekvivalent med:

$$n(n + 2) < (n + 1)^2.$$

dvs

$$n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1.$$

Denna olikhet förenklas till

$$0 < 1,$$

vilket onekligen är sant. Alltså är också den ursprungliga olikheten $(*)$ sann därför att den är ekvivalent med den sanna olikheten $0 < 1$.

Förklaring. Beviset bygger på omskrivningar som hela tiden ger ekvivalenta påståenden. Om p betecknar olikheten $(*)$, och q olikheten $0 < 1$ så visar vi att ekvivalensen $p \Leftrightarrow q$ är sann. Men q är sann. Alltså måste p vara sant.

(b) Betrakta nu talen

$$2^n \quad \text{och} \quad n^3.$$

Vad kan man säga om storleken av dessa två tal? $n = 1$ ger $2^1 = 2$ och $1^3 = 1$, $n = 2$ ger $2^2 = 4$ och $2^3 = 8$, för $n = 3$ har vi $2^3 = 8$ och $3^3 = 27$, för $n = 4$ är $2^4 = 16$ och $4^3 = 64$. Det verkar som om 2^n är mindre än n^3 i varje fall om man bortser från $n = 1$ dvs för $n \geq 2$. Kan vi lita på våra iaktagelser? Testa några ytterligare värden på n. Man får $2^5 = 32$ och $5^3 = 125$. Det är fortfarande $2^5 < 5^3$. Man konstaterar vidare att $2^6 < 6^3$, $2^7 < 7^3$, $2^8 < 8^3$ och $2^9 < 9^3$. Men $2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000$ och ännu tydligare $2^{11} = 2048 > 11^3 = 1331$. Nu kan vi börja tro på motsatsen dvs att $2^n > n^3$ för alla $n \geq 10$. Och detta påstående är verkligen sant! Vi kommer att bevisa den olikheten i avsnittet om matematisk induktion.

(c) Ett av de mest berömda misstagen i matematiken är Fermats påstående att talen $F_n = 2^{2^n}+1$ är primtal då $n = 0, 1, 2, \ldots$. Man har $2^{2^0}+1 = 3$, $2^{2^1}+1 = 5$, $2^{2^2}+1 = 17$, $2^{2^3}+1 = 257$, $2^{2^4}+1 = 65537$ är alla primtal. Pierre Fermat påstod på 1600-talet att alla tal F_n är primtal, men 100 år senare visade Leonhard Euler att talet $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ är delbart med 641 (vi visar Eulers påstående som övning i avsnittet om restaritmetiker). Det intressanta är att man inte har hittat några nya primtal F_n utöver de som Fermat kände (dvs F_0 till F_4). Alla kända Fermattal F_n med $n > 4$ är sammansatta och man snarare kan tro på motsasten till Fermats förmodan. En sådan gissning (dvs en generalisering av de kända experimentella resultaten) kan dock vara helt felaktig.

(d) "Pythagoras ekvationen"

$$x^2 + y^2 = z^2$$

har många heltaliga lösningar som t ex den mest berömda

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

och många andra:

$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$

$$8^2 + 15^2 = 17^2,$$

$$4961^2 + 6480^2 = 8161^2,$$

osv. I själva verket har denna ekvation oändligt många heltaliga lösningar. Formlerna:

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

där m och n är heltal, ger alla sådana lösningar så när som på ordningen mellan x och y (se vidare övningar). Denna ekvation är ett exempel på så kallade **Diofantiska ekvationer** – ekvationer med heltaliga koefficienter som man försöker lösa i heltalen (eller i rationella talen). Ett mycket berömt exempel är Fermats ekvation:

$$x^n + y^n = z^n$$

där n är ett positivt heltal större än 2. Den franske matematikern Pierre de Fermat studerade den ekvationen år 1637 och under en tid trodde att han hade bevisat att i varje heltalig lösning måste minst ett av talen x, y, z vara lika med 0. Detta påstående visades den 17 september 1995 av den engelske matematikern Andrew Wiles efter 358 år av sökande efter ett bevis. Då satsen visades visste man att Fermats påstående var sant för alla $n \leq 4000000$. Alltså trodde man på att Fermats ekvation saknade heltaliga lösningar med $xyz \neq 0$, men trots denna tro sökte man efter ett bevis. Wiles bevis är mycket långt – omfattar nära 120 sidor och bygger på flera tusen sidor av andra matematiska resultat. Men det finns en nära besläktad ekvation

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4$$

som betraktades av Leonhard Euler under 1700–talet. Hans gissning var att den ekvationen, precis som Fermats, saknar heltaliga lösningar med $xyzt \neq 0$. I datoråldern försökte man kontrollera Eulers påstående. Man fann då inga lösningar till ekvationen, vilket stödde bekräfta Eulers förmodan. Men år 1988 hittade Noam Elkies, då en mycket ung matematiker vid Harvard i USA, följande identitet:

$$18796760^4 + 2682440^4 + 15365639^4 = 20615673^4$$

vilket visar att Euler inte hade rätt. Elkies lösning är "den minsta" i lämplig mening. Detta visar ännu en gång att ett matematiskt påstående kan vara falskt (eller sant) trots att mycket talar för (eller emot) dess riktighet.

(e) Ett annat exempel kommer från R.K. Guy artikel "The Strong Law of Small Numbers" i American Mathematical Monthly, 95(1988) innehållande flera exempel på förhastade slutsatser som bygger på matematiska experiment. Talen

$$31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331$$

är alla primtal, men talet 333333331 är sammansatt – 333333331 är delbart med 17 (kontrollera!).

$\square$

Trots våra exempel leder ofta matematiska experiment (induktion) till korrekta gisningar och har därmed ett mycket stort värde. Efter en experimentserie formulerar man ofta en förmodan (en hypotes) och därefter försöker man bevisa dess riktighet. Vi ger ett antal exempel på olika deduktiva matematiska resonemang. Man kan inte ge några allmänna recept på hur man resonerar och bevisar matematiska sanningar. Att lära sig dessa tekniker tar vanligen ganska lång tid och kräver mycket övning. Men det viktiga är att förstå behovet av deduktiva motiveringar och få en känsla för vad ett bevis innebär. Vi ger några exmpel på deduktiva resonemang och samtidigt försöker vi förklara hur man resonerar när man bevisar olika påståenden.

(3.2) Exempel. (a) Visa att kvadraten av ett udda heltal är udda.

Bevis. Innan vi börjar beviset måste vi tänka en stund vad man menar med ett udda heltal. Svaret är att det är ett heltal som lämnar resten 1 vid division med 2. Ett sådant tal måste kunna skrivas som $n = 2q + 1$, där q betecknar kvoten.

Nu börjar vi beviset. Låt n vara ett udda heltal. Detta betyder att n lämnar resten 1 vid division med 2 dvs $n = 2q + 1$, där q är ett heltal. Vi räknar:

$$n^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1.$$

Nu ser vi att även n^2 lämnar resten 1 vid division med 2, därför att $n^2 = 2Q + 1$, där $Q = 2q^2 + 2q$ (Q är kvoten då man dividerar n^2 med 2). Alltså är n^2 ett udda heltal. $\square$

Förklaring. Resonemanget ovan är ett exempel på ett "mycket vanligt" **direkt** bevis. Man kan genomföra resonemanget på andra sätt och formulera tankarna annorlunda (möjligen något kortare). Observera att vi har visat att implikationen

$$n \textit{ är ett udda heltal} \Rightarrow n^2 \textit{ är ett udda heltal}$$

är sann.

(b) Vi skall visa att talet $\sqrt{2}$ inte är rationellt dvs kan inte skrivas som ett bråk med heltalig täljare och nämnare.

Bevis. Vi antar motsatsen dvs vi antar att

$$(*) \qquad \sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

där både m och n är positiva heltal och $n \neq 0$. Vi förutsätter att minst ett av talen m, n är udda därför att man alltid kan förkorta bråket om täljaren och nämnaren har en gemensam faktor 2. Den sista likheten ger

$$m^2 = 2n^2.$$

Den innebär att talet m^2 är jämnt och således måste m vara jämnt (ty kvadraten av ett udda m är udda). Vi kan skriva $m = 2m'$, där m' är ett heltal. Insättningen av $2m'$ i stället för m ger

$$2m'^2 = n^2.$$

Nu ser vi att även n måste vara jämnt ty n^2 är jämnt. Men detta är en klar motsägelse – det visar sig att både m och n är jämna, medan vi förutsatte att minst ett av dessa tal var udda. Denna motsägelse visar att ekvationen $(*)$ inte kan gälla dvs $\sqrt{2}$ är inte ett rationellt tal. $\square$

Förklaring: Vi vill visa att utsagan $A =$ "*$\sqrt{2}$ är inte ett rationellt tal*" är sann. Vi utgår ifrån dess motsats $\neg A =$ "*$\sqrt{2}$ är ett rationellt tal*". Denna utsaga medför mycket lätt utsagan $B =$"*minst ett av talen m, n är udda*". Efter några omskrivningar kommer vi till dess motsats: $\neg B =$ "*bägge talen m, n är jämna*". Då konstaterar vi att vår utgångsutsaga $\neg A$ måste vara falsk dvs utsagan A är sann.

Med hjälp av bokstäver kan situationen beskrivas på följande sätt:

$$\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$$

gäller. Då drar vi slutsatsen att $\neg A$ är en falsk utsaga därför att den medför en falsk utsaga $B \wedge \neg B$. Alltså måste A vara sant.

(3.4) Anmärkning. Resonemanget ovan förekommer i olika varianter. Man vill visa A. Man antar att motsatsen $\neg A$ gäller. Efter ett resonemang kommer man fram till att $\neg A$

implicerar både B och $\neg B$, vilket är orimligt – man får en **motsägelse**. Då konstaterar man att antagandet att $\neg A$ gäller var felaktigt dvs A måste vara sant.

Resonemag av den här typen kallas ofta för **motsägelsebevis**†. De bygger på följande tautologi:

$$[\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)] \Rightarrow A$$

(visa som övning att den är riktig!). □

(c) Vi skall återkomma till exempel (a) och visa att n är ett udda heltal då och endast då n^2 är ett udda heltal.

Förklaring. I (a) hade vi en implikation, medan vi här har en ekvivalens. Låt A beteckna utsagan "*n är ett udda heltal*" och B utsagan "*n^2 är ett udda heltal*". I (a) visade vi att implikationen $A \Rightarrow B$ är sann. Nu vill vi visa ekvivalensen $A \Leftrightarrow B$. Vi har tautologin:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$$

som visar att vi nu saknar den andra implikationen $B \Rightarrow A$.

Bevis. Ekvivalensen som skall visas kan ersättas av två implikationer: n *udda* $\Rightarrow n^2$ *udda* och n^2 *udda* $\Rightarrow n$ *udda*. Den första implikationen har redan visats i (a) ovan. Det återstår att visa den andra. Vi vet att n^2 är udda. Antag att n är ett jämnt heltal. Då är

$$n = 2n',$$

där n' är ett heltal. Alltså är $n^2 = 4n'^2$. Den likheten visar att n^2 är jämnt. Vi har alltså visat implikationen: n *jämnt* $\Rightarrow n^2$ *jämnt*. Detta innebär att n *udda* $\Rightarrow n^2$ *udda*. □

Förklaring. Vi visar implikationen $B \Rightarrow A$. Vi antar $\neg A$. Då får vi $\neg B$ dvs vi visar att implikationen

$$\neg A \Rightarrow \neg B$$

är sann. Vi drar slutsatsen att implikationen $B \Rightarrow A$ är sann. Här utnyttjas tautologin:

---

†Det latinska namnet på motsägelsebevis är **reductio ad absurdum**. Den engelska termen är **proof by contradiction**.

$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$$

(kontrollera den!). Eftersom högerledet i ekvivalensen visade sig vara sant, så måste också vänsterledet vara sant. Implikationen $\neg A \Rightarrow \neg B$ kallas ofta **kontrapositionen** av $B \Rightarrow A$. Det faktum att en implikation och dess kontrapositiva form alltid är ekvivalenta utnyttjas ofta i matematiska resonemang.

(d) Vilket av talen

$$a = \frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad \text{eller} \quad b = 6$$

är störst?

Man kunde beräkna b på en miniräknare, men kan man lita på miniräknare? Vi skall försöka lösa problemet och bevisa förhållandet mellan a och b (svaret är inte självklart).

Låt oss anta att $a \leq b$ (vårt antagande kan visa sig vara falskt och då är det tvärtom $a > b$. Vi gör ett antal omskrivningar:

$$\frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \leq 6 \quad \Rightarrow$$

$$3\sqrt{7} + 5\sqrt{2} \leq 6\sqrt{5} \quad \Rightarrow$$

$$(3\sqrt{7} + 5\sqrt{2})^2 \leq (6\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow$$

$$63 + 30\sqrt{7}\sqrt{2} + 50 \leq 180 \quad \Rightarrow$$

$$30\sqrt{14} \leq 67 \quad \Rightarrow$$

$$(30\sqrt{14})^2 \leq 67^2 \quad \Rightarrow$$

$$12600 \leq 4489$$

Den sista olikheten är falsk. Alltså måste den första olikheten vara falsk därför att alla implikationer är sanna. Detta betyder att $a > b$ dvs andra talet är mindre.

Förklaring: Detta är också ett exempel på ett "motsägelsebevis". Vi antar att $a \leq b$ (utsagan A). Då får vi att $12600 \leq 4489$ (utsagan B), vilket ger en motsägelse eftersom $12600 > 4489$ (utsagan $\neg B$). Vi drar slutsatsen att vår utgångsutsaga $a \leq b$ är falsk dvs $a > b$ är sann.

Observera dock att man kan resonera på ett annat sätt. Alla "pilar" $\Rightarrow$ är i verkligheten ekvivalenser $\Leftrightarrow$. Den falska olikheten $12600 \leq 4489$ säger att den ursprungliga $a \leq b$ måste vara falsk. Därför gäller $a > b$. (Man kunde börja med $a > b$ och då skulle resonemanget förenklas.)

(e) Är det sant att för alla reella tal x gäller likheten $(x+1)^2 = x^2 + 1$? Nej, likheten ter sig orimlig eftersom $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, medan till höger har man $x^2 + 1$. Räcker detta resonemang som bevis? En sådan argumentering är mycket nära ett formellt bevis, men man kan komma med invändningar– att två uttryck ser annorlunda ut behöver inte innebära att de inte är lika ändå. Ta t ex $x^3 + 1$ och $(x+1)(x^2 - x + 1)$. Dessa två uttryck har olika utseenden, men de är lika för alla reella x:

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1.$$

Rent formellt undrar vi om följande utsaga är sann:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \;\; (x+1)^2 = x^2 + 1.$$

Vi vill visa att den är falsk, vilket betyder att

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} \;\; (x+1)^2 \neq x^2 + 1.$$

Sanningen av den sista utsagan följer om vi ger ett enda exempel på att det finns $x \in \mathbb{R}$ så att $(x+1)^2 \neq x^2 + 1$. Välj då t ex $x = 3$. Då är

$$(3+1)^2 \neq 3^2 + 1.$$

Detta är vårt bevis. Man säger ofta i liknande sammanhang att man konstruerar ett **motexempel**.

Betrakta ett annat exempel. Är det sant att för alla rella tal a och b gäller det att $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? Vi vet mycket väl att så är inte fallet. Hur bevisar vi detta? Det räcker att konstruera ett motexempel: Tag $a = 9$, $b = 16$. Då har man:

$$\mathrm{VL} = \sqrt{9+16} = 5$$

och

$$\mathrm{HL} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7.$$

Om VL = HL, så är 5 = 7 – en klar motsägelse. Detta visar att HL och VL inte är lika dvs rent allmänt är

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

□

Vi återkommer i övningar till andra exempel på bevis. Låt oss notera att det mycket sällan finns färdiga recept på matematiska bevis. Det är en stor utmaning och ibland en mycket svår uppgift att bevisa matematiska satser. Men det finns en del bevismetoder och mycket generella principer. En känd bevismetod kallas "matematisk induktion". Vi möter den metoden i ett av de efterföljande avsnitten. Men att ha en "bevismetod" betyder inte att man kan automatisera bevisprocessen (detta gäller inte minst matematisk induktion). Det finns dock undantagsfall då matematiska bevis kan automatiseras. Ett sådant sällsynt exempel är bevis av tautologier i satslogik (man har ju "sanningstabeller") och bevis av olika identiteter för likheter mellan mängder (som kan översättas till uttryck i satslogik – se motsvarande exempel i avsnitet om matematikens språk).