

# Explorativ övning 12

## TALBEGREPPET\*

Övningens syfte är att bekanta sig med talbegreppet. Vi skall försöka få en bättre förståelse för hur och varför man definierar olika typer av tal: de naturliga, rationella, reella och komplexa. I första hand försök lösa följande uppgifter: **A**, 1,2, 3 (a) – (c), **B**, **C**, **D** 1 – 4, **E** 1 – 2, **F**, **G**.

Vi följer texten i kompendiet “Talsystem och restaritmetiker” (avsnitt 12).

### Övning A

1. Ge några exempel på talkroppar och talringar.
2. Ge två exempel på talringar som inte är kroppar.
3. Vilka av följande talmängder är ringar? Vilka av dem är kroppar?
  - (a)  $\{0, 1\}$ ,
  - (b)  $a + b\sqrt{3}$ , där  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,
  - (c)  $a + b\sqrt{5}$ , där  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,
  - (d)  $a + b\sqrt[3]{2}$ , där  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,
  - (e)  $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ , där  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,
  - (f)  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ , där  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

### Övning B

Vi vet från avsnittet om talbegreppet att om  $d$  är ett heltal och  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$  så bildar alla tal  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d}, a, b \in \mathbb{Q}\}$  en utvidgning av talkroppen  $\mathbb{Q}$  (en talkropp som är större än  $\mathbb{Q}$ ).

1. Visa att  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \neq \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ .

---

\*MAL200/220, ht 00

2. Försök generalisera (a) och ge exempel på oändligt många olika talkroppar.

### Övning C

1. Vad anser Du om likheten  $(-1)(-1) = 1$ : Är det en definition (dvs en "överenskommelse") eller en sats?
2. Visa att i varje ring  $R$  gäller följande likheter:
  - (a)  $a0 = 0$  då  $a \in R$ ,
  - (b)  $(-1)(-1) = 1$ ,
  - (c)  $-(-a) = a$  då  $a \in R$ ,
  - (d)  $(-a)b = -ab$  då  $a, b \in R$ ,
  - (e)  $(-a)(-b) = ab$  då  $a, b \in R$ .

### Övning D

Denna övning handlar om rationella och irrationella tal.

1. (a) Bestäm decimalutvecklingen av talen  $\frac{3}{11}$  och  $\frac{1}{7}$ .  
(b) Motivera att decimalutvecklingen av ett rationellt tal är periodisk.  
**Ledning:** Analysera divisionsalgoritmen då man decimalutvecklar bråktalen.  
**Anmärkning.** Man visar ganska enkelt att om ett reellt tal har periodisk decimalutveckling så är det rationellt.
2. Låt  $a$  och  $b$  vara irrationella tal. Vad kan man säga om talen  $a^{-1}$  och  $ab$ ? Är de också irrationella?
3. Försök förklara varför  $0,999\dots = 1$ .
4. (a) Visa att  $\sqrt{3}$  är icke-rationellt genom att jämföra antalet primfaktorer 3 till vänster och till höger i likheten  $3n^2 = m^2$ .  
(b) Visa på liknande sätt att  $\sqrt{p}$  är icke-rationellt då  $p$  är ett godtyckligt primtal.  
(c) Har Du några förslag på hur man kan generalisera (b)?  
(d) Visa att talet  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  inte är rationellt.
5. (a) Visa att talet  ${}^2\log 5$  är icke-rationellt.  
(b) Kan Du föreslå några andra tal, i stället för 5 i (a), för vilka samma påstående gäller?

## Övning E

Låt  $K$  vara en ordnad kropp och  $a, b, c \in K$ .

- Visa att  $K$  har följande egenskaper:
  - $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ ,
  - $a < b$  och  $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ ,
  - hur förändras (b) då man ersätter  $a < b$  med  $a \leq b$ ?
- Visa att
  - $|ab| = |a||b|$ ,
  - $|a + b| \leq |a| + |b|$  (triangelolikheten).
- De naturliga talen bildar en växande följd  $1 < 2 < 3 \dots$  som inte är begränsad. Utnyttja denna kunskap för att visa följande viktiga egenskaper hos talen:
  - “Arkimedes princip”: Om  $a, b$  är två positiva reella tal så finns det ett naturligt tal  $n$  så att  $na > b$ .
  - Låt  $a, b$  vara två reella tal och låt  $a < b$ . Det finns ett rationellt tal  $\frac{m}{n}$  sådant att  $a < \frac{m}{n} < b$ .

**Ledning:** Välj  $n$  så att  $n(a - b) > 1$ . Välj därefter minsta  $m$  så att  $m > nb$ .

## Övning F

Från texten i avsnitt 12 vet vi att de rationella talen (“bråktalen”) konstrueras från heltalen som par  $(a, b)$ , där  $a$  och  $b$  är heltal och  $b \neq 0$ . Paret  $(a, b)$  uppfattas som lösningen till ekvationen  $bx = a$ . Ekvationen  $dx = c$  har samma lösning som  $bx = a$  precis då  $ad = bc$ . Det rationella talet  $\frac{a}{b}$  är helt enkelt ekvivalensklassen av paret  $(a, b)$  då  $(a, b) \sim (c, d)$  då och endast då  $ad = bc$ .

- Skriv ut 3 ekvationer och motsvarande par  $(a, b)$  som svarar mot  $x = \frac{3}{5}$ .
- Kontrollera att relationen  $\sim$ , definierad av  $(a, b) \sim (c, d)$  då och endast då  $ad = bc$ , verkligen är en ekvivalensrelation.
- När har ett rationellt tal  $\frac{a}{b}$  en invers? Skriv inversen på formen  $[(c, d)]$ .
- Kontrollera att om

$$[(a, b)] = [(a', b')] \quad \text{och} \quad [(c, d)] = [(c', d')]$$

är två rationella tal ( $ab' = a'b$  och  $cd' = c'd$ ) så gäller

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} \quad \text{och} \quad \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \frac{c'}{d'}$$

(dvs summan och produkten av två rationella tal beror inte på hur dessa tal representeras i form av bråk).

## Övning G

Från texten i avsnitt 12 vet vi att heltalen konstrueras från de naturliga talen som par  $(a, b)$ , där  $a$  och  $b$  är naturliga tal. Paret  $(a, b)$  uppfattas som lösningen till ekvationen  $b + x = a$ . Ekvationen  $d + x = c$  har samma lösning precis då  $a + d = b + c$ .

1. Skriv ut 3 ekvationer och motsvarande par  $(a, b)$  som svarar mot  $x = 2$ . Gör samma sak med  $x = -3$ .
2. Betrakta alla par  $(a, b)$ , där  $a, b \in \mathbb{N}$  och visa att relationen

$$(a, b)R(c, d) \iff a + d = b + c$$

är en ekvivalensrelation.

3. Välj på ett enkelt sätt en representant för varje ekvivalensklass.
4. Motivera att det finns en bijektion mellan ekvivalensklasserna för  $R$  och heltalen (observera att om vi inte känner till heltalen så kan de definieras som ekvivalensklasser av paren  $(a, b)$ ).

## Övning H

1. Skriv följande kvaternioner på formen  $a + bi + cj + dk$  :
  - (a)  $(1 + i)(1 + j)$ ,
  - (b)  $(i + j + k)^2$ ,
  - (c)  $(1 + 2i + 3j + 4k)(1 - 2i - 3j - 4k)$ ,
  - (d)  $ijk$ .
2. (a) Visa att  $q = 1 + i + j + k$  och  $\bar{q} = 1 - i - j - k$  satisfierar ekvationen  $x^2 - 2x + 4 = 0$ .  
(b) Visa att  $q = a + bi + cj + dk$  satisfierar en kvadratisk ekvation med reella koefficienter.

Följande övning i stencilen "Talsystem och restaritmetiker" rekommenderas: **12.3**.