

# Explorativ övning 11

## GEOMETRI\*

Syftet med denna övning är att ge kunskaper om grundläggande geometriska begrepp och resultat om geometriska figurer. Vi vill också ge en uppfattning om geometri som en matematisk teori och dess uppbyggnad.

Vi skall bekanta oss med valda delar av en mycket klassisk del av geometri – euklidisk plan geometri. Euklides var en grekisk matematiker utbildad vid den Platonska Akademien i Aten och verksam i Alexandria c:a 300 f.Kr. Han samlade dåtida kunskaper i geometri och kompletterade dessa med sina egna resultat. Euklides utnyttjade både kunskaper från äldre kulturer som t ex den Babylonska och från grekiska matematiker som t ex Pythagoras och hans efterföljare (600 f.Kr till 400 f.Kr). Euklides publicerade sitt verk “Elementa” i 13 volymer som huvudsakligen ägnas just åt geometri, men innehåller också flera aritmetiska resultat (t ex ett bevis att det finns oändligt många primtal). Euklides försökte bygga upp en konsekvent deduktiv matematisk teori – ett antal klara förutsättningar om punkter, linjer och plan skulle kunna användas som utgångspunkt till att med hjälp av logiska resonemang härleda olika egenskaper hos geometriska figurer. Dessa förutsättningar – den euklidiska geometrins “spelregler” – kallas **axiom** eller **postulat** och gäller så kallade **primitiva begrepp** som punkter, linjer och plan samt vissa enkla geometriska figurer (som t ex sträckor och cirklar). Med utgångspunkt från axiomen försökte Euklides härleda olika egenskaper hos geometriska figurer. Han lyckades med att bevisa flera vik-

---

\*MAL200/220, ht 01, preliminär version

tiga geometriska resultat.

Euklides verk är det första försöket i den mänskliga civilisationens historia att bygga en vetenskap på deduktiva grunder. Euklides böcker betraktades under flera hundra år som ett mönster för hur vetenskapliga teorier borde formas. De användes som skolläroböcker så sent som i slutet av 1800-talet. En noggrann och kritisk analys av Euklides text visade då på en del brister i hans teori vars framställning modifierades något (av bl a David Hilbert), men Euklides huvudidé lever kvar – hela matematikens uppbyggnad följer samma deduktiva principer som den euklidiska geometrin. Det har skrivits tusentals läroböcker i geometri som under en lång tid var ett av de viktigaste delarna i skolmatematiken. På 1960-talet försökte man modernisera presentationen av euklidisk geometri i skolan. Reformen var inte förberedd ordentligt både när det gällde lämpliga läroböcker och lärarnas fortbildning. Detta ledde till att den euklidiska geometrin nästan försvann från kursplaner. Idag finns det väldigt lite geometri kvar i skolläroböcker. Geometrin är en mycket viktig del av vårt vardagliga liv – en modell av geometriska former som vi finner i vår omgivning. Kunskaper om enkla geometriska figurer är lika viktiga som kunskaper om t ex talsystem och måste betraktas som en mycket viktig del av allmänbildningen. Geometrin är mycket mera intuitiv och lättare att förstå än t ex en del egenskaper hos talsystem. Man måste dock medge att en sträng uppbyggnad av euklidisk geometri är relativt komplicerad och att det finns mycket enklare exempel på matematiska teorier som ger en klarare uppfattning om hur en axiomatisk teori fungerar. Tyvärr förpassades euklidisk geometri från skolmatematiken nästan fullständigt och ersattes inte med något annat som kunde tillgodose behovet av ett bra exempel på hur man kan utveckla en riktig matematisk teori (en matematisk modell) för att studera vår omgivning.

De viktigaste begreppen och satser i detta avsnitt är:

- Kongruens och likhet mellan sträckor, vinklar och trianglar.
- Kongruensfallen för trianglar (basvinkelsatserna).
- Parallella linjer (likbelägna vinklar och alternativvinklar).
- Yttervinkelsatsen, vinkelsumman i en triangel.
- Längd och area.

- Likformighet av trianglar och likformighetsfallen.
- Några viktiga satser om trianglar (bisektriser, medianer, höjder, Pythagoras sats).
- Cirklar (kordasatsen).
- Konstruktioner med passare och linjal.

Vi skall också utnyttja kunskaper från detta avsnitt för att få bättre förståelse av vad man menar med deduktiv vetenskap och axiomatisk metod i matematiken.

Vi avslutar denna övning med några sidor från den svenska utgåvan av Euklides berömda lärobok i geometri vars översättning publicerades av Mårten Strömer (1707 – 1770). Under flera hundra har man använt denna bok som lärobok i skolan. Strömer introducerade flera geometriska termer som vi idag använder. Observera att Euklides gör en distinktion mellan axiom och postulat – dessa två ord är idag synonyma (i klassisk grekisk terminologi är ett postulat specifikt för en vetenskap, medan ett axiom gäller för alla vetenskaper).

Vi följer Bo Stenströms kompendiet “Euklidisk geometri”. I första hand försök lösa uppgifterna **A, B, C, E, F, G, I, J, L, P, Q**.

## Övning A

Läs texten om “Axiom och primitiva begrepp” i kompendiet (sid. 1 och 2). Försök därefter besvara följande frågor och diskutera svaren i Din grupp:

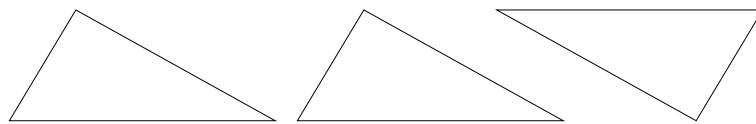
1. Hur kan man föreställa sig en axiomatisk teori? Vad är ett primitivt begrepp? Vad är ett axiom? Försök svara på dessa frågor genom att jämföra axiomatisk teori med ett spel t ex schack. Vad är “primitiva begrepp” i schackspel? Vad är axiomen?
2. Ge exempel på några definitioner (t ex av några geometriska figurer eller parallella linjer). Vilken roll spelar definitionerna och varför är de viktiga? Försök svara på dessa frågor genom att jämföra definitionerna

med förklaringar av ord i ett främmande språk (eller främmande ord i svenskan).

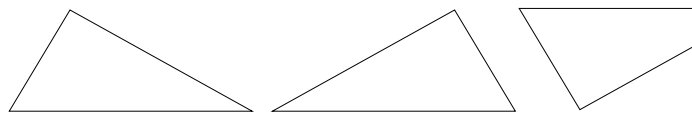
3. Vad är skillnaden mellan axiom och satser? Ge exempel på ett axiom och ett exempel på en sats.

## Övning B

1. Vad menas med att två trianglar är lika? När säger man att två trianglar är kongruenta?
2. Är följande trianglar "till synes" lika? Är de lika? Är de kongruenta?



3. Samma fråga som ovan om trianglarna:



4. Vad är skillnaden mellan de båda fallen ovan?
5. Vad behöver man veta enligt definitionen av kongruensbegreppet mellan trianglar för att kunna konstatera att två trianglar är kongruenta? Är det nödvändigt att alla villkor i definitionen (6 stycken) gäller? Vilken information räcker för att sluta sig till att två trianglar är kongruenta?
6. Försök definiera kongruensbegreppet för fyrhörningar. Formulera Ditt eget "kongruensfall" för två fyrhörningar (tänk inte för länge på den uppgiften).

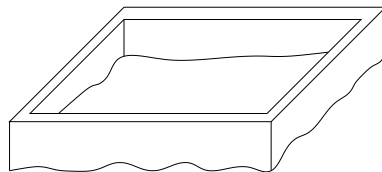
## Övning C

**Denna övning handlar om parallelogram.**

1. Vet du vad en parallelogram är? Jämför Dina tankar med Exempel 2 på sid. 7 i kompendiet.
2. Visa att motstående vinklar i en parallelogram är kongruenta.
3. Visa att motstående sidor i en parallelogram är kongruenta.
4. Visa att om alla vinklar i en fyrhörning är räta, så är fyrhörningen en parallelogram.
5. I parallelogrammen  $ABCD$  är  $\angle A$  rät. Visa att  $ABCD$  är en rektangel.
6. Visa att om i en fyrhörning motstående sidor är lika stora, så är fyrhörningen en parallelogram.
7. Visa att diagonalerna i en parallelogram delar varandra mitt itu.

## Övning D

Många människor (alla snickare) vet hur man genom att enbart mäta längder (med t ex ett måttband) kan kontrollera om en husgrund (eller ett rum, o s v) är rektangulär. (Om ni inte vet ingår det i uppgiften att tänka ut detta).



1. Skriv upp alla steg i en sådan process.
2. Bevisa att metoden är korrekt.
3. Diskutera värdet med att ge ett sådant bevis: bra/dåligt? Varför?

## Övning E

Lös uppgifterna 1, 2, 4, 5 och 6 i kompendiet på sid. 17.

## Övning F

Denna övning handlar om längd och mätning.

1. Redan tidigare användes begreppet längd av en sträcka (hur?). Man tar väl för givet att varje sträcka kan tillordnas ett måttetal, som är ett positivt reellt tal. Diskutera vad som menas med detta.
2. Vad menas med en enhet? Kan en enhet delas? Kan den delas hur många gånger som helst?
3. Vad menas med kommensurabla sträckor? Hur kan man avgöra om två sträckor är kommensurabla?
4. Är sidan och diagonalen i en kvadrat kommensurabla?
5. Vad menas med avståndet mellan två (parallella) linjer? Hur mäter man det?

## Övning G

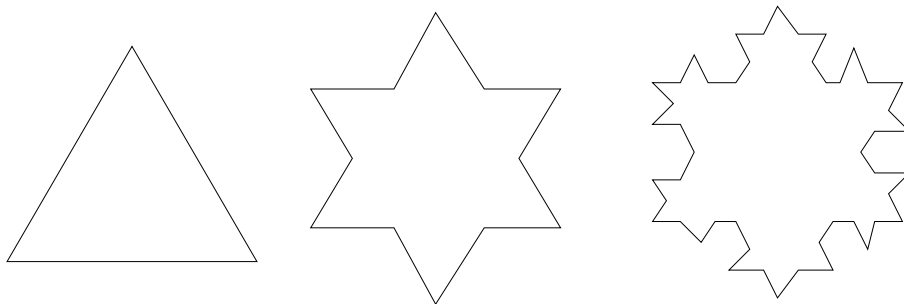
1. Vet du vad *area* är? Vad är en yta. Vad är skillnaden?
2. Visa punkt 1 och 2 om area av parallelogram och triangel på sid. 8 i kompendiet.

## Övning H

1. Kan det vara så att en figur med ändlig area kan ha en godtycklig stor omkrets?

Vi studerar von Kochs "snöflingestjärna" (jfr. sid. 26 i Kristin Dahls

bok).



Om vi kallar de olika stjärnorna  $S_i$  med triangeln  $S_1$  som den första "stjärnan", så kan vi säga att man får  $S_{i+1}$  ur  $S_i$  genom att sätta en liksidig triangel på den mittersta tredje delen av varje sida (och ta bort dubbla sträckor).

2. Beräkna längden av omkretsen av stjärnan  $S_n$ .
3. Beräkna  $S_n$ 's area.
4. Vad händer med omkretsen och arean då  $n \rightarrow \infty$ ?

## Övning I

### Likformighetsbegreppet.

1. Tänk igen på vad som menas med att två figurer är lika, är kongruenta, är likformiga (har "samma form").
2. Vad menas med att två trianglar är likformiga? Jämför med kongruensdefinitionen. Vad behöver man veta enligt definitionen av likformighetsbegreppet mellan trianglar för att kunna konstatera att två trianglar är likformiga? Är det nödvändigt att alla villkor i definitionen (6 stycken) gäller? Vilken information räcker för att sluta sig till att två trianglar är likformiga?
3. Behöver två figurer som är likformiga vara kongruenta och/eller lika? Varför/varför inte? Är två kvadrater likformiga? När är de lika eller kongruenta?

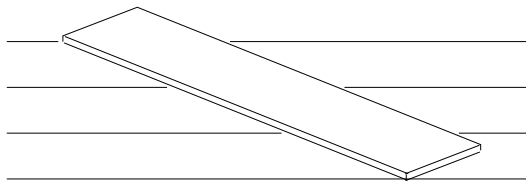
4. Hitta en rektangel sådan att om man tar bort en kvadrat så återstår en rektangel som är likformig med den ursprungliga (jfr. uppgift 40 på sid. 19 – Du behöver inte lösa konstruktionsproblemet).

### Övning J

Lös uppgifterna 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 18 i kompendiet på sid. 17 och 18.

### Övning K

1. Om man vill dela en bräda i 3 lika delar så kan man skaffa sig 4 parallella linjer (t ex springor i ett parkettgolv) med lika avstånd.



Ni får förtydliga metoden själva. Verkar den praktisk? Varför är den korrekt? (Ge ett bevis!).

2. Hitta på en metod att dela brädan i förhållandet  $2 : 5$ ,  $1 : 4$ ,  $1 : n$ ,  $m : n$ .
3. Jämför metoden med konstruktionsproblemet 5 på sid. 15 i kompendiet.

### Övning L

#### Pythagoras sats.

1. Formulera satsen.
2. Tag reda på så många bevis för Pythagoras sats som du kan.
3. Jämför beviset i kompendiet med Euklides bevis som det presenteras i Strömers bok.



4. Vad behövs för att göra 'klipp-och-klistra'-beviset (se sid. 10 i kompendiet) till ett riktigt bevis?
5. Gör ett bevis med hjälp av areaberäkningar i den vänstra figuren på sid. 10 i kompendiet.

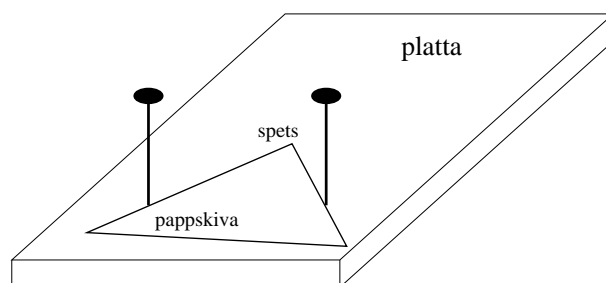
## Övning M

Denna uppgift handlar om figuren på sista sidan. Klipp ut en av dem. Klipp därefter ut de 4 vita delfigurerna.

1. Kan du av dessa 4 vita bitar lägga en kvadrat med sidelängd 8?
2. Kan du av dem lägga en  $5 \times 13$  rektangel?
3. Hur många rutor fanns i början? Blev du överraskad? Vad stämmer inte?
4. Vad är likheterna och skillnaderna mellan den här uppgiften och läggpusselbevisen för Pythagoras sats?

## Övning N

Betrakta följande experimentuppställning bestående av en platta med två spikar och en triangelformad pappskiva. Gör en egen (plattan kan ersättas med en pappersark med två markerade punkter).



Om pappskivan skjutes in mot spikarna kommer spetsen att hamna i en bestämd punkt — markera denna punkt. Variera nu detta förfarande och du får en mängd punkter. Dessa punkter hamnar på en kontinuerlig kurva (varför?). Hur ser kurvan ut? Kan du bevisa ditt förmodan?

### Övning O

Om du befinner dig på havet och ser t ex två fyrar under konstant vinkel — trots att du rör dig — vad betyder det? Kan du hitta på ett sätt att kontrollera att du inte rör dig? (Detta kan vara viktigt om man ligger för ankar på redde.)

### Övning P

Lös uppgifterna 19, 21, 23, 27, 31, och 49 i kompendiet (sid. 18, 19 och 20).

### Övning Q

#### **Geometriska konstruktioner med passare och linjal.**

1. Läs texten om geometriska konstruktioner med passare och linjal på sid. 15 i kompendiet. Lös själv alla konstruktionsuppgifter på denna sida.
2. Lös uppgifterna 37, 38, 39, 41, 44 i kompendiet.
3. Förklara hur man utan att mäta kan addera och subtrahera kvadrater med hjälp av Pythagoras sats (dvs med passare och linjal konstruera en kvadrat vars area är summan respektive skillnaden av areorna av två givna kvadrater).