MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i
MAL 200/220, del 3/1, 5p
2000-08-12, kl 8.45 - 13.45
Hjälpmedel: valfri miniräknare
Telefonvakt: Magnus Wängefors, tel. 0740–479626

1. Goldbachs förmodan säger att varje jämnt heltal större än 2 är en summa av två primtal. Formulera Goldbachs förmodan med hjälp av kvantorerna "$\forall$" och "$\exists$". Beteckna de naturliga talen med $\mathbb{N}$ och primtalen med $\mathbb{P}$. Formulera därefter negationen till Goldbachs förmodan.

2. Låt A vara en mängd med 5 element, B en mängd med 3 element och C en mängd med 4 element (vi skriver $|A| = 5$, $|B| = 3$, $|C| = 4$). Hur många element kan ingå i mängden $(A \cup B) \setminus C$. Bestäm det minsta möjliga och det största möjliga antalet element i denna mängd. Exemplifiera Dina påståenden!

3. Låt a, b, c beteckna tre heltal. Betrakta utsagan:

   Om största gemensamma delaren till a, b, c är lika med 1 så är största gemensamma delaren till a, b eller b, c eller a, c lika med 1.

   (a) Är denna utsaga sann? Motivera noga Ditt svar!

   (b) Formulera negationen till denna utsaga!

4. Bevisa att talet $\sqrt[3]{3}$ inte är rationellt.

5. (a) Definiera begreppet uppräknelig mängd.

   (b) Visa att mängden av alla tal i intervallet $[0, 1]$ har samma kardinalitet som mängden av alla tal i intervallet $[0, 2]$.

6. Använd matematisk induktion för att bevisa likheten

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

   då $n = 1, 2, 3, \ldots$.

7. (a) Formulera aritmetikens fundamentalsats.

   (b) Låt $a = 20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 20$ och $b = 30!/20! = 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdots 30$. Skriv både a och b som produkt av primtal. Beräkna därefter $\mathrm{SGD}(a, b)$.

8. Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^4 - 10z^2 + 169 = 0$. Vilken geometrisk figur bildar de punkter som svarar mot lösningarna i komplexa talplanet?

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 20p.
Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 22 augusti. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon fr o m den 22 augusti: tel. 772 3509 efter kl. 14.00.