jub ht 2000

LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN
I MAL 200/220 del 3/1 2000-10-30

1. **(a) Vilka av följande mängder är lika:** $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| < 2\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^3 = n\}$, $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \leq 2n\}$, $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$**?**

   (b) Bestäm mängden $(A \setminus B) \cup (C \cap D)$**.**

   (a) Vi har $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n < 2\} = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = 0\} = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - 2n = n(n-2) \leq 0\} = \{0, 1, 2\}$ och $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Alltså är $A = B$.

   (b) Vi har $A \setminus B = \emptyset$ och $C \cap D = \{0, 1, 2\}$. Alltså är $(A \setminus B) \cup (C \cap D) = \{0, 1, 2\}$.

2. **Är följande utsaga sann eller falsk (**$\mathbb{R}$ **betecknar de reella talen och** $\mathbb{N}$ **de naturliga talen):**

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, (x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, (x < n \wedge n < y))?$$

   Formulera negationen till denna utsaga så att negationssymbolen "¬" inte förekommer i svaret. Vilka logiska sanningar (tautologier) använder Du? Bevisa en av dessa tautologier!

   Utsagan är falsk. Den säger att mellan två godtyckliga reella tal x och y ligger ett naturligt tal n. Om man t ex väljer $x = 1$ och $y = 1,5$ så hittar man inte något naturligt tal mellan dessa. Negationen till utsagan är

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, (x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, (x < n \wedge n < y))) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\, (x < y \wedge \forall n \in \mathbb{N}\, \neg(x < n \wedge n < y)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\, (x < y \wedge \forall n \in \mathbb{N}\, (x \geq n \vee n \geq y)).$$

   Vi använder de Morgans lagar bl a $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ och $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$. Dessa tautologier kan visas med hjälp av sanningstabeller (vi utelämnar beviset här – se kursboken).

3. **Låt** $A = \{2, 3, 4, \ldots\}$ **vara mängden av alla naturliga tal större än 1 och** B **mängden av alla primtal. Låt** $f : A \to B$ **vara funktionen definierad så att** $f(n) =$ **den minsta primtal som delar** n **(tex** $f(6) = 2$, $f(35) = 5$, $f(41) = 41$ **osv).**

   (a) Är funktionen f **injektiv? Är den surjektiv?**

   (b) Vilka naturliga tal n **avbildas på 2 (dvs** $f(n) = 2$**)?**

   (c) Ge exempel på fem tal n **i** A **sådana att** $f(n) = 3$**. Finns det oändligt många sådana naturliga tal** n**? Får Du samma svar då man ersätter 3 med ett annat primtal?**

   (a) Funktionen är inte injektiv t ex $f(2) = f(4) = 2$ dvs två olika element i A har samma bild i B. Funktionen f är surjektiv ty $f(p) = p$ då p är ett godtyckligt primtal.

   (b) Likheten $f(n) = 2$ innebär att talet n är delbart med 2 dvs n är ett jämnt heltal.

   (c) Om $n = 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$ så är $f(n) = 3$. Rent allmänt är $f(3^n) = 3$ för varje $n = 1, 2, 3, \ldots$. 3 kan ersättas med ett godtyckligt primtal p ty $f(p^n) = p$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4. **(a) Ge exempel på en uppräknelig och en icke–uppräknelig mängd. Bevisa ett av Dina påståenden.**

(b) Låt $A = \mathbb{Q}$ vara mängden av alla rationella tal och B mängden av alla icke–rationella reella tal. Vad är mängden $A \cup B$? Är mängden B uppräknelig eller icke–uppräknelig? Motivera noga alla Dina svar!

(a) De rationella talen är ett exempel på en uppräknelig mängd, och de reella på en icke–uppräknelig. Bevisen finns i stencilen "Ändligt och oändligt".

(b) Mängden $A \cup B = \mathbb{R}$ – de reella talen. En sats i stencilen "Ändligt och oändligt" säger att om A och B är uppräkneliga så är också $A \cup B$ uppräknelig. Eftersom A är uppräknelig och $\mathbb{R}$ icke–uppräknelig så måste B vara icke–uppräknelig (hade B varit uppräknelig så skulle även $\mathbb{R} = A \cup B$ vara uppräknelig).

5. **Bevisa att för varje $n = 1, 2, 3, \ldots$ är**

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}.$$

Först kontrollerar vi att likheten gäller då $n = 1$. Vi har då VL $= \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$ och HL $= \frac{1}{6 \cdot 1 + 4} = \frac{1}{10}$.

Nu antar vi att likheten gäller för $n = k$, $k \geq 1$ dvs

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{k}{6k+4}$$

och visar att den också gäller för nästa naturliga tal $n = k + 1$ dvs

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{k+1}{6k+10}.$$

Bevis:

$$\text{VL} = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} =$$

$$\frac{k}{6k+4} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)} = \frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)} =$$

$$\frac{(3k+2)(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)} = \frac{k+1}{6k+10} = \text{HL}.$$

Enligt induktionsprincipen gäller likheten för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6. **(a) Bestäm primfaktoruppdelningar av talen $a = 4725$ och $b = 9702$ och utnyttja Ditt resultat för att beräkna SGD(a, b) samt MGM(a, b).**

(b) Beräkna SGD(a, b) genom att använda Euklides algoritm.

(a) Man finner lätt att $a = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ och $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$. Alltså är $\text{SGD}(a, b) = 3^2 \cdot 7 = 63$ och $\text{MGM}(a, b) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = 727650$.

(b) Vi har $9702 = 4725 \cdot 2 + 252$, $4725 = 252 \cdot 18 + 189$, $252 = 189 \cdot 1 + 63$, $189 = 63 \cdot 3$. Alltså är den sista nollskilda resten i Euklides algoritm lika med 63 dvs $\text{SGD}(9702, 4725) = 63$.

7. **Vi bevisade att talen $\sqrt{2}$ och $\sqrt[3]{5}$ inte är rationella. Ge exempel på några andra reella tal som inte är rationella och bevisa ett av Dina påståenden.**

   Man kan visa på liknande sätt att $\sqrt{n}$ inte är rationellt för varje naturligt tal n som inte är en kvadrat av ett heltal (t ex , $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ osv). Mera allmänt kan man visa att varje $\sqrt[k]{n}$ inte är rationellt om n inte är en k–te potens av ett heltal (t ex $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{6}$ osv). Se Vretblads bok eller stencilen "Induktion och deduktion" för exempel på bevis.

8. **(a) Beräkna $\sqrt{33+56i}$.**

   (b) Vad menar man med symbolen $\sqrt{a}$ då a är ett reellt tal och vad menar man med denna symbol då a är ett komplext tal (t ex $\sqrt{16}$ och $\sqrt{33+56i}$)?

   (a) Låt $\sqrt{33+56i} = x+yi$. Då är $(x+yi)^2 = 33+56i$ dvs $x^2-y^2+2xyi = 33+56i$. Denna likhet är ekvivalent med ekvationssystemet $x^2-y^2 = 33$, $2xy = 56$. Genom att beräkna absolutbeloppet i likheten $(x+yi)^2 = 33+56i$ får vi ytterligare en ekvation: $x^2+y^2 = \sqrt{33^2+56^2} = 65$. Vi adderar och subtraherar ekvationerna: $x^2-y^2 = 33$ och $x^2+y^2 = 65$, vilket ger $x^2 = 49$ och $y^2 = 16$. Alltså är $x = \pm 7$ och $y = \pm 4$. Men $xy = 28$, så att vi har $x = 7, y = 4$ eller $x = -7, y = -4$. Svaret är alltså att $\sqrt{33+56i} = \pm(7+4i)$.

   (b) Om a är ett reellt tal så används symbolen $\sqrt{a}$ då $a \geq 0$ och betecknar ett icke–negativt tal b sådant att $b^2 = a$. Om a är ett komplext tal, som t ex i uppgiften (a), så betecknar symbolen $\sqrt{a}$ alla komplexa tal z sådana att $z^2 = a$ dvs alla lösningar till denna ekvation. Det finns alltid två lösningar då $a \neq 0$. I (a) betecknar symbolen $\sqrt{33+56i}$ två tal $\pm(7+4i)$. Observera dock att med $\sqrt{-1}$ menar man mycket ofta talet i, och ej $\pm i$ (den stränga definitionen av i diskuteras i avsnittet om "Talsystem").