MATEMATIK

Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i
MAL 200, del 3, 5p
1999-01-04, kl 8.45 - 13.45
Telefonvakt: Sebastian Sandberg, tel. 0740 479626

1. (a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att formulera "Bertrands förmodan": För varje heltal $n > 1$ finns det ett primtal som ligger mellan n och $2n$. (Förslag: beteckna mängden av de naturliga talen med N och mängden av primtalen med P.) Kontrollera att Bertrands förmodan är sann då $n = 2, 10$ och 100.

   (b) Formulera negationen till "Bertrands förmodan" så att negationssynbolen inte förekommer i svaret. (Trots att "Bertrands förmodan" visades för länge sedan av den ryske matematikern Tchebychev kallas den fortfarande "förmodan".)

2. Låt A, B, C beteckna tre mängder.

   (a) Är mängderna $(A \cup B) \setminus C$ och $(A \setminus C) \cup B$ lika? Motivera Ditt påstående.

   (b) En av dessa mängder är alltid en del av den andra. Vilken? Bevisa Ditt påstående.

3. (a) Bevisa att talet $\sqrt[3]{2}$ inte är rationellt.

   (b) Förklara hur ett motsägelsebevis fungerar.

4. (a) Definiera begreppen största gemensamma delaren (SGD) och minsta gemensamma multipeln (MGM) till två heltal a och b.

   (b) Förklara med hjälp av ett exempel hur man kan beräkna SGD(a, b) och MGM(a, b) och bevisa sambandet mellan a, b, SGD(a, b) och MGM(a, b).

5. Bevisa likheten

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

6. I Leonhard Eulers "Algebra" (boken skrevs på 1700–talet) finns följande problem: Dela 100 i två delar så att den ena är delbar med 7 och den andra med 11. Lös Eulers uppgift i termer av den allmänna metod som handlar om heltaliga lösningar till ekvationer $ax + by = c$ och ge en beskrivning av denna metod.

7. Lös ekvationen $(2 + i)z^2 - 5z + 15 + 5i = 0$ och skriv dess rötter på formen $a + bi$.

8. (a) Bestäm alla heltaliga lösningar till den Diofantiska ekvationen $x^2 - y^2 = 5$.

   (b) Försök generalisera Dina argument till ekvationen $x^2 - y^2 = p$, där p är ett primtal (observera att $p = 2$ avviker från det allmänna mönstret).

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 20p. Om Du fick 2p under vt 1998 behöver Du inte lösa talen 1,2 och behöver 8p för godkänd.
Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 14 januari.