LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN I MAL 200 del 3 1999-03-27

1. **(a) Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$ och $C = \{1, 2, 6\}$. Bestäm mängderna $A \setminus (B \setminus C)$ och $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$.**

   (b) Är det alltid sant att mängderna $A \setminus (B \setminus C)$ och $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$ är lika? Bevisa Ditt påstående med hjälp av definitionerna av mängdoperationerna. Använd de logiska konnektiven.

   (a) Vi har $B \setminus C = \{5\}$, $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{5\} = \{1, 2, 3, 4\}$, och $A \setminus B = \{3, 4\}$, $A \cap C = \{1, 2\}$ så att $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$. Alltså är mängderna lika dvs $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ i detta fall.

   (b) Allmänt:

$$x \in [A \setminus (B \setminus C)] \Leftrightarrow x \in A \land x \notin (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \land \neg(x \in B \setminus C) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \land \neg(x \in B \land x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \land (x \notin B \lor x \in C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \land x \notin B) \lor (x \in A \land x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \lor x \in (A \cap C) \Leftrightarrow x \in [(A \setminus B) \cup (A \cap C)].$$

   Alltså gäller likheten $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

2. **Är utsagan $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, b \in \mathbb{R}\ \ a = b^2$ sann? Motivera Ditt svar. Vad händer då man kastar om kvantorernas ordning i denna utsaga? Får man en sann utsaga då?**

   (b) Formulera negationen till den första utsagan i (a)!

   (a) Utsagan $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, b \in \mathbb{R}\ \ a = b^2$ är falsk. Om man väljer $a = -1$ så får man att det finns $b \in \mathbb{R}$ med $b^2 = -1$, vilket är falskt. Om man kastar om kvantorerna får man $\exists\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, b \in \mathbb{R}\ \ a = b^2$, vilket också är falskt – det finns inte ett reellt tal a som är en kvadrat av alla rella tal b.

   (b) Negationen är $\exists\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, b \in \mathbb{R}\ \ a \neq b^2$. Denna utsaga är sann. Om man väljer $a = -1$ så får man ett tal som inte är en kvadrat av något reellt tal b (dvs $-1 \neq b^2$ för alla reella b).

3. **Ge exempel på ett motsägelsebevis ("reductio ad absurdum") – formulera en sats och ge dess bevis.**

   Du kan t ex visa att det finns oändligt många primtal eller att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal osv (se kursboken eller stencilerna). Man skall också förklara hur man resonerar.

4. **Låt $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ och $B = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$.**

   (a) Betrakta funktionen $f : A \to B$, där $f(n) = 6n$ (dvs 2 avbildas på 12, 4 på 24, 6 på 36 osv). Är denna funktion bijektiv?

   (b) Definiera en annan funktion $g : A \to B$ som är bijektiv.

   (c) Har mängderna A och B samma kardinalitet? Är de uppräkneliga?

   (a) Funktionen är inte surjektiv eftersom talet $6 \in B$ saknar urbild dvs det finns inte $n \in A$ så att $f(n) = 6n = 6$ (då måste $n = 1$, men $1 \notin A$). Man kan säga att det inte finns "en pil" som kommer från något element i A till $6 \in B$. Funktionen är inte heller bijektiv (eftersom den är inte surjektiv).

(b) Definiera $g : A \to B$ så att $g(n) = 3n$. Denna funktion är både injektiv och surjektiv dvs bijektiv. Elementen i A är alla positiva jämna heltal och elementen i B är alla positiva heltal delbara med 6. Funktionen g avildar varje jämnt heltal $2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ på motsvarande heltal $g(2k) = 6k$ som är ett heltal delbart med 6. g är injektiv (om $g(n_1) = g(n_2)$ så är $3n_1 = 3n_2$ dvs $n_1 = n_2$) och surjektiv (om $6k \in B$ så är $6k = g(2k)$ dvs det går "en pil" från $2k$ till $3 \cdot 3k = 6k$).

(c) Mängderna A och B har samma kardinalitet som de naturliga talen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dvs A och B är uppräkneliga. Det finns en bijektiv funktion från $\mathbb{N}$ till A t ex $r(k) = 2k$ och från $\mathbb{N}$ till B t ex $s(k) = 6k$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$. (Vi har redan en bijektiv funktion från A till B i (b)).

5. **Bevisa med hjälp av matematisk induktion att**

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

Vi kontrollerar likheten för $n = 1$: VL $= 1 \cdot 4 = 4$ och HL $= 1 \cdot (1 + 1)^2 = 4$. Alltså är VL = HL.

Nu antar vi att likheten gäller för $n = k$, $k \geq 1$ dvs

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + k(3k + 1) = k(k + 1)^2$$

och vi vill visa att likheten också gäller för $n = k + 1$ dvs

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Bevis:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) = k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4) =$$

$$= (k + 1)[k(k + 1) + 3k + 4] = (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Enligt induktionsprincipen gäller likheten för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6. **(a) Uppdela följande tal i produkt av primtal: 6, 21, 105 och därefter 12, 54, 72. De första tre talen kallas *kvadratfria*, de sista tre är inte kvadratfria. Försök ge en egen definition av begreppet *kvadratfritt* naturligt tal.**

(b) Bestäm naturliga tal x och y sådana att $x^2y = 5880$ och y är kvadratfritt.

(c) Är det alltid möjligt att skriva ett naturligt tal som produkt av en kvadrat och ett kvadratfritt tal? Motivera Ditt svar genom att t ex hänvisa till aritmetikens huvudsats.

(a) Vi har $6 = 2 \cdot 3$, $21 = 3 \cdot 7$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; $12 = 2^2 \cdot 3$, $54 = 2 \cdot 3^3$ och $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Kvadratfria tal innehåller inte två lika primfaktorer. Man har följande **definition**: Ett naturligt tal $n \geq 1$ kallas *kvadratfritt* om p^2 inte dividerar n för varje primtal p. Observera att med denna definition är talet 1 kvadratfritt.

(b) Utan svårigheter delas 5880 i primfaktorer: $5880 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Nu väljer vi $y = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Låt $x = \sqrt{\frac{5880}{y}} = \sqrt{\frac{5880}{30}} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} = 14$. Då är $5880 = x^2 y$.

(c) Metoden i (b) kan beskrivas på följande sätt: Låt n vara ett givet naturligt tal. Om $n = 1$ så väljer vi $x = 1$ och $y = 1$. Om $n > 1$ uppdelar vi n i primfaktorer i enlighet med aritmetikens huvudsats: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. Definiera nu det kvadratfria talet y som produkt av alla primtal i faktoruppdelningen av n vars exponenter k_i är udda. Om alla dessa exponenter är jämna väljer vi $y = 1$. Nu delar vi n med y. Talet $\frac{n}{y}$ är en kvadrat eftersom exponenterna av alla primfaktorer av detta tal är jämna eller $\frac{n}{y} = 1$. Vi väljer $x = \sqrt{\frac{n}{y}}$. Då är $n = x^2 y$.

7. **Bestäm alla positiva heltaliga lösningar (x, y) till ekvationen $2x - 5y = 1$ sådana att både x och y är primtal mindre än 100.**

Först hittar vi en partikulär lösningen till ekvationen t ex $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Vi har $2x - 5y = 2x_0 - 5y_0$ så att $2(x - x_0) = 5(y - y_0)$. Den sista likheten säger att 2 delar $y - y_0$ dvs $y - y_0 = 2k$, där k är ett heltal. Alltså är $y = y_0 + 2k = 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Likheten $2(x - x_0) = 5(y - y_0) = 5 \cdot 2k$, ger $x = x_0 + 5k = 3 + 5k$. Vi vill bestämma alla lösningar (x, y) sådana att x och y är primtal mindre än 100. Detta villkor ger att $0 < 3 + 5k < 100$ så att $0 \leq k < 20$. Vi testar dessa värden på k och får tre lösningar: $(13, 5)$ för $k = 2$, $(43, 17)$ för $k = 8$ och $(73, 29)$ för $k = 14$.

8. **Beräkna**

$$\left(\frac{3+7i}{5+2i}\right)^{20} + \left(\frac{3-7i}{5-2i}\right)^{20}$$

och skriv Ditt svar på formen $a + bi$.

Vi har

$$\left(\frac{3+7i}{5+2i}\right)^{20} + \left(\frac{3-7i}{5-2i}\right)^{20} = \left(\frac{(3+7i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)}\right)^{20} + \left(\frac{(3-7i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}\right)^{20} =$$

$$= \left(\frac{15 - 6i + 35i + 14}{29}\right)^{20} + \left(\frac{15 + 6i - 35i + 14}{29}\right)^{20} = (1+i)^{20} + (1-i)^{20} =$$

$$= [(1+i)^2]^{10} + [(1-i)^2]^{10} = (2i)^{10} + (-2i)^{10} = -2^{10} - 2^{10} = -2^{11} = -2048.$$