MATEMATIK Tentamensskrivning i

MAL 200, del 3, 5p

Göteborgs universitet 1999-10-19, kl 8.45 - 13.45

Telefonvakt: Anders Öhgren, tel. 0740 479626

1. Låt $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 < 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $C = \{x \in \mathbb{N} | x < 15$ och x är ett primtal$\}$. Bestäm $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$ och $(A \cup B) \cap C$. Är dessa mängder lika? Gäller Ditt påstående för helt godtyckliga mängder A, B, C? Motivera med hjälp av t ex Venn–diagram!

2. (a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att formulera följande utsaga: Om $n \geq 1$ är ett naturligt tal så är både $6n - 1$ och $6n + 1$ primtal. Är denna utsaga sann? Motivera Ditt påstående.

   (b) Formulera negationen till utsagan i (a) (så att negationssymbolen "$\neg$" inte förekommer i svaret). Vilken logisk sanning (tautologi) använder Du?

   (Du kan beteckna mängden av primtalen med t ex $\mathbb{P}$).

3. Ge exempel på två oändliga mängder A och B och tre funktioner $f : A \to B$, $g : A \to B$, $h : A \to B$ sådana att

   (a) f är injektiv, men ej surjektiv,

   (b) g är surjektiv, men ej injektiv,

   (c) h är både injektiv och surjektiv dvs bijektiv.

4. (a) Motivera att alla tal $5^k 7^l$, där k och l är naturliga tal, bildar en uppräknelig mängd.

   (b) Bevisa att om A och B är två uppräkneliga mängder så är också mängden $A \cup B$ uppräknelig.

   (c) Använd (a) och (b) till att motivera att även alla tal $\pm 5^k 7^l$ bildar en uppräknelig mängd.

5. Bevisa att för varje $n = 1, 2, 3, ...$ är talet $T_n = 5^{2n} - 1$ delbart med 12.

6. (a) Låt a och b vara relativt prima naturliga tal (dvs $\text{SGD}(a, b) = 1$). Bestäm a och b då man vet att $ab = 225$.

   (b) Visa att om a och b är relativt prima naturliga tal vars produkt är en kvadrat av ett naturligt tal så måste både a och b vara kvadrater av naturliga tal.

   Ledning till (b): Du kan använda aritmetikens fundamentalsats.

7. Bestäm två heltal x och y sådana att likheten $(5n+2)x + (12n+5)y = 1$ gäller för alla heltal n. Bestäm $\text{SGD}(5n + 2, 12n + 5)$ då $n \in \mathbb{Z}$.

   Ledning. Du kan börja med $n = 0$.

8. (a) Låt z_1 och z_2 vara två komplexa tal. Visa likheten $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

   (b) Låt z vara ett komplext tal. Visa att om $|z| = 1$ så gäller $|2z - 1| = |z - 2|$.

   Ledning. Kvadrera beloppen!

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 20p.

Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 2 november. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon fr o m den 2 november: tel. 772 3509 efter kl. 14.00.