

Tentamensskrivning i MAL 200, del 4

1. Ge exempel på
 - (a) en relation som är symmetrisk, men inte transitiv,
 - (b) en operation på heltalsmängden \mathbb{Z} som inte är kommutativ,
 - (c) en restring \mathbb{Z}_n som inte är en kropp.Motivera dina svar!
2. Faktoruppdela polynomet $X^4 + 2X^2 - 8$ i produkt av irreducibla polynom med koefficienter i \mathbb{Q} , \mathbb{R} och \mathbb{C} (dvs i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$).

3. Som bekant kan heltal definieras som ekvivalensklasser av relationen

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

på mängden av alla par (a, b) , där a, b, c, d är naturliga tal.

- (a) Kontrollera att relationen \sim verkligen är en ekvivalensrelation.
- (b) Ge exempel på två representanter för ekvivalensklassen av -2 och två representanter för ekvivalensklassen av 4 . Utnyttja dina exempel för att förklara att multiplikation av heltal kan utföras med helt godtyckliga representanter för dessa klasser.
- (c) Visa att multiplikation av heltal är en kommutativ operation. (4p)

4. På hur många sätt kan 13 personer delas in i 1 grupp om 4 och 3 grupper om 3 personer?

5. Formulera och bevisa Pythagoras' sats.

6. (a) Visa att de tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.
(b) När ligger skärningspunkten utanför triangeln? Motivera ditt svar.

7. På sidorna i en kvadrat med sidan 2 ritas liksidiga trianglar, alla inåt. De fyra triangelytornas snitt är en liksidig (men ej regelbunden) 8-hörning. Beräkna dess sida.

8. (a) Lös, om möjligt, ekvationen

$$X^2 + 1 = 0$$

i \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_7 , \mathbb{Z}_{11} och \mathbb{Z}_{13} .

(b) Visa att ekvationen inte har några lösningar i \mathbb{Z}_p om p är ett primtal på formen $p = 4k - 1$.

Ledning: antag att x är en lösning och beräkna $(x^2)^{\frac{p-1}{2}}$ på två sätt.

Varje uppgift utom en ger maximalt 3 poäng. För godkänd skrivning krävs minst 12 poäng. För väl godkänd krävs minst 18 poäng (utan bonuspoäng).

Tentan räknas vara färdigrättad tisdagen den 18 januari. Tentor kan hämtas i mottagningsrummet kl 12.30–13.00 varje vardag. Tentamensresultat lämnas ut på telefon 772 35 09 efter kl 14.00.

Lycka till!

Jan Stevens