

Tentamensskrivning i MAL 200 del 4 och MAL 220 del 2

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

Tänk på att det i huvudsak är dina motiveringar och beräkningar som ger poäng, inte svaret.

1. (a) Ge exempel på en ring med ett nollskiljt element som saknar multiplikativ invers.
(b) Ge exempel på ett kongruensfall för trianglar i euklidisk geometri.
(c) Ge exempel på en relation som inte är transitiv. (3)
2. För vilka heltal n gäller $3|n^2 + 2$? (2)
3. Finn polynom i $K[x]$ som har både $\sqrt{2}$ och i som nollställen då
 - (a) $K[x] = \mathbb{C}[x]$,
 - (b) $K[x] = \mathbb{R}[x]$,
 - (c) $K[x] = \mathbb{Q}[x]$.Försök låta dina polynom vara av lägsta möjliga grad. (3)
4. Låt oss definiera en operation \star på heltalen genom $x \star y = xy - x - y + 2$.
 - (a) Är \star kommutativ?
 - (b) Är \star associativ?
 - (c) Finns det någon neutralt element?
 - (d) Vilka element har invers? (4)
5. Tre par (heterosexuella) skall gå på konsert och har fått biljetter intill varandra på samma rad. På hur många olika sätt kan de placera sig om
 - (a) placeringen är fri,
 - (b) personer av samma kön inte får sitta bredvid varandra,
 - (c) damerna skall sitta intill varandra (3)

6. En parallelogram är en fyrhörning där motsatta sidor är parallella. Visa att en fyrhörning är en parallelogram om och endast om den har motstående sidor som är lika långa. (3)
7. Om ett element $a \neq 0$ i en ring R implicerar $a \cdot b = 0$ för något $b \neq 0$ så kallas a för *nolldelare*.
- (a) Ge ett exempel på en ring som innehåller nolldelare.
 - (b) Visa att om R är en kropp så finns inga nolldelare i R .
 - (c) Använda detta för att visa att om \mathbb{Z}_n är en kropp så är n ett primtal. (3)
8. Antag att G är en grupp med en operator \star . En delmängd H till G kallas en delgrupp om också H är en grupp med \star . Visa att relationen given av $a \sim b \Leftrightarrow a \star b^{-1} \in H$ är en ekvivalensrelation. (3)

För godkänt krävs 10 poäng och för väl godkänt 20 poäng. Skrivningen beräknas vara färdiggrättad 25 januari. För resultat per telefon, ring efter klockan 14 på telefon 031-772 3509.

Lycka till! — Samuel