Lösningar till tentamensskrivningen
i MAL 200/220, Algebra och geometri, 20020118

1. **Formulera och bevisa Pythagoras' sats.**

   Se kompendiet om Euklidisk geometri och övningarna.

2. **Visa att en punkt på bisektrisen till en vinkel ligger på samma avstånd från båda vinkelbenen. Visa också omvändningen, att en punkt i vinkelns fält på samma avstånd från vinkelbenen ligger på vinkelns besektris.**

   Låt punkten P ligga på bisektrisen till vinkeln $\measuredangle A$. Dra normalerna AB och AC till vinkelbenen. Då är i trianglerna ABP och ACP motsvarande vinklar lika stora och eftersom sträckan AP är gemensam, är trianglerna kongruenta. Så avståndet $|PB|$ till ena vinkelbenet är lika stort som avståndet $|PC|$ till det andra vinkelbenet.
   Omvänt, antag att $|PB| = |PC|$, där B, resp C, är skärningspunkten av normalen med vinkelbenet AB, resp AC. Drag linjen AP. Enligt Pythagoras är nu även $|AB| = |AC|$, så $\Delta ABP \cong \Delta ACP$ och därmed är $\measuredangle BAP = \measuredangle CAP$, d v s strålen AP är bisektrisen.

3. **Formulera och bevisa binomialsatsen.**

   Se Vretblad och Övning 14, S 4.

4. **Faktoruppdela polynomet $X^4 + 7X^2 - 18$ i produkt av irreducibla polynom med koefficienter i $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ (dvs i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$).**

   Låt $X^2 = Y$. Då är $X^4 + 7X^2 - 18 = Y^2 + 7Y - 18 = (Y + 9)(Y - 2) = (X^2 + 9)(X^2 - 2)$. Polynomen $X^2 + 9$ och $X^2 - 2$ är irreducibla i $\mathbb{Q}[X]$ eftersom de saknar rationella nollställen, så $(X^2 + 9)(X^2 - 2)$ är faktoruppdelningen i $\mathbb{Q}[X]$. Polynomet $X^2 + 9$ saknar reella nollställen och är därmed irreducibelt i $\mathbb{R}[X]$, medan $(X^2 - 2) = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$; detta ger faktoruppdelningen $(X^2 + 9)(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$. Slutligen kan man i $\mathbb{C}[X]$ skriva polynomet som produkt av linjärfaktorer: $X^4 + 7X^2 - 18 = (X + 3i)(X - 3i)(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$.

5. **Definiera operationen "$*$" på mängden $\mathbb{Z}$ av heltalen genom**

   $$m * n = mn - m - n$$

   då $m, n \in \mathbb{Z}$. Är denna operation kommutativ? Associativ? Finns det ett neutralt element?

   Operationen är kommutativ: $m * n = mn - m - n = mn - n - m = n * m$, men inte assiociativ: $(m*n)*p = (mn-m-n)p-(mn-m-n)-p = mnp-mp-np-mn+m+n-p$, medan $m*(n*p) = m(np-n-p)-m-(np-n-p) = mnp-mp-np-mn-m+n+p$; ett konkret exempel är $(0 * 0) * 1 = 0 * 1 = -1$, medan $0 * (0 * 1) = 0 * (-1) = 1$. Om e är ett neutralt element, så gäller $n = n * e = ne - n - e$ för alla n, speciellt gäller då $1 = 1 * e = e - 1 - e = -1$. Så ett neutralt element finns inte.

6. Betrakta relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, given av $(x,y) \sim (x',y')$ då och endast då $(x,y) = (\lambda x', \lambda y')$ för någon positiv konstant $\lambda > 0$.
a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation.
b) Bestäm ekvivalensklassen som innehåller punkten $(1,1)$.
c) Beskriv alla ekvivalensklasser genom att välja en lämplig representant för varje klass.

a) Relationen $\sim$ är reflexiv: $(x,y) \sim (x,y)$, ty $(x,y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y)$, symmetrisk: om $(x,y) \sim (x',y')$, d v s $(x,y) = (\lambda x', \lambda y')$, då är $(x',y')(1/\lambda x, 1/\lambda y)$ med $1/\lambda > 0$, d v s $(x',y') \sim (x,y)$ och transitiv: om $(x,y) \sim (x',y')$, d v s $(x,y) = (\lambda x', \lambda y')$, och $(x',y') \sim (x'',y'')$, d v s $(x',y') = (\mu x'', \mu y'')$, då är $(x,y) = (\lambda\mu x'', \lambda\mu y'')$ med $\lambda\mu > 0$, dvs $(x,y) \sim (x'',y'')$. Därmed är $\sim$ en ekvivalensrelation.
b) Ekvivalensklassen som innehåller punkten $P = (1,1)$ består av alla punkter (x,x) med $x > 0$; d v s ekvivalensklassen är strålen OP, där O är origon.
c) Varje ekvivalensklass är en stråle utgående från origon. Som representanter kan vi välja punkterna på enhetscirkeln.

7. Vilken rest ger 2^{2002} vid division med
a) 31 b) 11 c) 341 ?

Observera att $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$, $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$ och att $341 = 11 \cdot 31$. Då gäller $2^{2002} = (2^5)^{400} \cdot 2^2 \equiv 1^{400} \cdot 4 = 4 \pmod{31}$ och $2^{2002} = (2^5)^{400} \cdot 2^2 \equiv (-1)^{400} \cdot 4 = 4 \pmod{11}$. Enligt kinesika restsatsen är nu också $2^{2002} \equiv 4 \pmod{341}$.

8. Vilka av följande talmängder är ringar? Vilka av dem är kroppar?
a) $a + b\sqrt{5}$, där $a, b \in \mathbb{N}$?
b) $a + b\sqrt{5}$, där $a, b \in \mathbb{Z}$?
c) $a + b\sqrt{5}$, där $a, b \in \mathbb{Q}$?
d) $a + b\sqrt{5}$, där $a, b \in \mathbb{R}$?

a) Mängden är inte en ring: den är inte sluten under subtraktion.
b) Nu är det en ring, men inte en kropp, ty $1/a$ ligger inte i mängden om $a > 1$.
c) Enligt Sats 12.3 är detta en kropp.
d) Observera att $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$, så $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ och därmed en kropp.