Göteborgs universitet **MAL 200, del 4, 5p**

1998-06-04, kl 8.45 - 13.45
Hjälpmedel: valfri miniräknare
Telefonvakt: tel. 0740–479626

1. Ge exempel på

   (a) Ett reellt tal som inte är rationellt.

   (b) En ring som inte är en kropp.

   (c) En relation som inte är transitiv.

   Motivera mycket noga Dina svar!

2. Faktoruppdela polynomet $X^4 - 2X^2 - 15$ i produkt av irreducibla polynom med koefficienter i $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ (dvs i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$).

3. Låt M vara mängden av heltalen och definiera operationen "$*$" på M så att:

$$m * n = m + (-1)^m n$$

   då $m, n \in M$. Är denna operation kommutativ? Associativ? Finns det ett neutralt element? Bestäm alla element i M som har invers.

4. Som bekant kan rationella tal definieras som ekvivalensklasser av relationen

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

   på mängden av alla par (a, b), där a, b, c, d är heltal och $bd \neq 0$.

   (a) Kontrollera att relationen "$\sim$" verkligen är en ekvivalensrelation.

   (b) Ge exempel på två representanter för ekvivalensklassen av $\frac{2}{3}$ och två representanter för ekvivalensklassen av $\frac{5}{8}$. Utnyttja Dina exempel för att förklara att addition av rationella tal kan utföras med helt godtyckliga representanter för dessa klasser.

5. Formulera och bevisa "kordasatsen" om två kordor som skär varandra i en cirkel.

6. I en triangel $\triangle ABC$ är medianerna utgående från A och B vinkelräta. Beräkna längden av sidan AB om $|AC| = 6$ och $|BC| = 8$.

7. (a) Formulera Fermats lilla sats för $p = 5$.

   (b) Låt $f(k) = 1^k + 2^k + 3^k + 4^k \pmod 5$. Beräkna $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(-1), f(0)$.

   (c) Bestäm alla möjliga värden av funktionen f då $k \in \mathbb{Z}$.

8. (a) Formulera multiplikationsprincipen.

   (b) Hur många heltal mellan 1000 och 9999 har alla siffror olika? Redogör för hur Du resonerar.

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs 20p.