

Vi ger hänvisningar till kurslitteraturen när det gäller teorifrågor dvs definitioner, satser och deras bevis.

1. Ge exempel på

(a) Ett reellt tal som inte är rationellt.

(b) En ring som inte är en kropp.

(c) En relation som inte är transitiv.

Motivera mycket noga Dina svar!

(a) $\sqrt{2}$ är ett reellt tal som inte är rationellt. Om $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, där p och q är heltal, så är $2q^2 = p^2$, vilket visar att det finns ett udda antal primfaktorer 2 till vänster och ett jämnt antal sådana faktorer till höger. Detta strider mot aritmetikens fundamentalsats.

(b) Heltalen \mathbb{Z} är ett exempel på en ring som inte är en kropp. I en kropp har varje nollskilt element en invers, men talet 2 saknar invers i \mathbb{Z} dvs ekvationen $2x = 1$ saknar heltaliga lösningar.

(c) Låt M vara mängden av alla människor. Låt $x, y \in M$ och definiera $x \sim y$ om x och y känner varandra. Då kan det vara så att $x \sim y$ och $y \sim z$, medan $x \not\sim z$.

2. Faktoruppdelna polynomet $X^4 - 2X^2 - 15$ i produkt av irreducibla polynom med koefficienter i \mathbb{Q} , \mathbb{R} och \mathbb{C} (dvs i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$).

Låt $X^2 = Y$. Då är

$$X^4 - 2X^2 - 15 = Y^2 - 2Y - 15 = (Y + 3)(Y - 5) = (X^2 + 3)(X^2 - 5)$$

eftersom ekvationen $Y^2 - 2Y - 15 = 0$ har två lösningar -3 och 5 .

(Man kan också faktoruppdelna polynomet $X^4 - 2X^2 - 15$ genom kvadratkomplettering: $X^4 - 2X^2 - 15 = X^4 - 2X^2 + 1 - 16 = (X^2 - 1)^2 - 4^2 = (X^2 + 3)(X^2 - 5)$).

Detta är en faktoruppdelning i två irreducibla polynom med rationella koefficienter. $X^2 + 3$ och $X^2 - 5$ är irreducibla i $\mathbb{Q}[X]$ därför att de saknar rationella nollställen. Vi har $X^4 - 2X^2 - 15 = (X^2 + 3)(X^2 - 5) = (X^2 + 3)(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5})$ om vi tillåter reella koefficienter. Polynomen i produkten är irreducibla i $\mathbb{R}[X]$ därför att $X^2 + 3$ saknar reella nollställen och de övriga faktorerna har grad 1. Slutligen är $X^4 - 2X^2 - 15 = (X^2 + 3)(X^2 - 5) = (X + i\sqrt{3})(X - i\sqrt{3})(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5})$ om vi tillåter komplexa koefficienter. Alla faktorer har grad 1 och är därmed irreducibla i $\mathbb{C}[X]$.

3. Låt M vara mängden av heltalen och definiera operationen "*" på M så att:

$$m * n = m + (-1)^m n$$

då $m, n \in M$. Är denna operation kommutativ? Associativ? Finns det ett neutralt element? Bestäm alla element i M som har invers.

Observera att $m * n = m + n$ då m är jämnt, och $m * n = m - n$ då m är udda.

Operationen är inte kommutativ. T ex är $2 * 3 = 2 + 3 = 5$ och $3 * 2 = 3 - 2 = 1$ dvs $2 * 3 \neq 3 * 2$.

Operationen är associativ dvs $(m * n) * p = m * (n * p)$ för alla heltal m, n, p . Först välj m jämnt. Då är

$$VL = (m * n) * p = (m + n) * p = m + n + (-1)^{m+n} p$$

och

$$HL = m * (n * p) = m * (n + (-1)^n p) = m + n + (-1)^n p$$

dvs VL = HL ty $(-1)^{m+n} = (-1)^n$ (m är jämnt). Antag nu att m är udda. Då är

och

$$\text{HL} = m * (n * p) = m * (n + (-1)^n p) = m + (-1)^m (n + (-1)^n p) = m - n + (-1)^{m+n} p,$$

dvs VL = HL ty $(-1)^{m-n} = (-1)^{m+n}$ (talen $m - n$ och $m + n$ är samtidigt udda eller samtidigt jämna).

Det neutrala elementet är 0 ty $m * 0 = m$ och $0 * m = m$ för varje heltal m .

Ett heltal m har invers om det finns ett heltal x så att $m * x = 0$ och $x * m = 0$. Om m är jämnt så ger $m * x = m + x = 0$ så att $x = -m$ och $x * m = (-m) * m = -m + m = 0$. Om m är udda så ger $m * x = m - x = 0$ så att $x = m$ och $x * m = m * m = m - m = 0$. Alltså har varje element invers.

4. Som bekant kan rationella tal definieras som ekvivalensklasser av relationen

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

på mängden av alla par (a, b) , där a, b, c, d är heltal och $bd \neq 0$.

(a) Kontrollera att relationen “ \sim ” verkligen är en ekvivalensrelation.

(b) Välj exempel på två representanter för ekvivalensklassen av $\frac{2}{3}$ och två representanter för ekvivalensklassen av $\frac{5}{8}$. Utnyttja Dina exempel för att förklara att addition av rationella tal kan utföras med helt godtyckliga representanter av dessa klasser.

(a) $(a, b) \sim (a, b)$ ty $ab = ab$ så att relationen är reflexiv.

$(a, b) \sim (c, d)$ ger $(c, d) \sim (a, b)$ ty $ad = bc$ ger $cb = da$ så att relationen är symmetrisk.

$(a, b) \sim (c, d)$ och $(c, d) \sim (e, f)$ ger $(a, b) \sim (e, f)$ ty $ad = bc$ och $cf = de$ ger $af = be$. Bevis: $adf = bcf = bde$ så att $af = be$ ty $d \neq 0$. Detta visar att relationen är transitiv.

(b) Ekvivalensklassen av $\frac{2}{3}$ representeras t ex av paren $(2, 3)$ och $(4, 6)$. Ekvivalensklassen av $\frac{5}{8}$ representeras t ex av paren $(5, 8)$ och $(10, 16)$. Summan av talen $\frac{2}{3}$ och $\frac{5}{8}$ beror inte på representantvalet. T ex är

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 5 \cdot 3}{3 \cdot 8} = \frac{31}{24}$$

och

$$\frac{4}{6} + \frac{10}{16} = \frac{4 \cdot 16 + 10 \cdot 6}{6 \cdot 16} = \frac{124}{96},$$

vilket ger representanter för samma ekvivalensklass $(31, 24) \sim (124, 96)$ ty $31 \cdot 96 = 24 \cdot 124$.

5. Formulera och bevisa “kordasatsen” om två kordor som skär varandra i en cirkel.

Se kompendiet “Euklidisk geometri”.

6. I en triangel $\triangle ABC$ är medianerna utgående från A och B vinkelräta. Beräkna längden av sidan AB om $|AC| = 6$ och $|BC| = 8$.

Låt A_1 vara mittpunkten på BC , B_1 mittpunkten på AC och M skärningspunkten av medianerna AA_1 och BB_1 . Låt $x = |MA_1|$ och $y = |MB_1|$.

ras sats $|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2$ så att $|AB|^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2)$. Enligt förutsättningen är $\triangle AMB_1$ och $\triangle BMA_1$ rätvinkliga trianglar så att Pythagoras sats ger $|AM|^2 + |MB_1|^2 = |AB_1|^2$ samt $|BM|^2 + |MA_1|^2 = |BA_1|^2$ dvs $(2x)^2 + y^2 = 3^2$ samt $(2y)^2 + x^2 = 4^2$. Alltså är $5(x^2 + y^2) = 25$ (addera ekvationerna ledvis!) dvs $x^2 + y^2 = 5$. Detta ger att $|AB|^2 = 4(x^2 + y^2) = 20$ så $|AB| = 2\sqrt{5}$.

7. (a) **Formulera Fermats lilla sats för $p = 5$.**

(b) Låt $f(k) = 1^k + 2^k + 3^k + 4^k \pmod{5}$. Beräkna $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(-1), f(0)$.

(c) Bestäm alla möjliga värden av funktionen f då $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Satsen säger att $5|a^5 - a$ för varje heltal a .

(b) $f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0, f(4) = 4, f(5) = 0, f(-1) = 0, f(0) = 4$ modulo 5.

(c) Funktionen $f(n)$ antar endast två värden -0 och 4 . För att bevisa detta observerar vi att för varje $a = 1, 2, 3, 4$ är $a^4 = 1$ modulo 5 så att potenserna av a bildar en periodisk följd med perioden 4. Alltså återkommer också funktionens f värden med perioden 4. En sådan period börjar med $f(1)$ och slutar med $f(4)$. Observera att $a^4 = 1$ ger $a^{-1} = a^3$, vilket visar att varje negativ heltalig exponent kan ersättas med en positiv.

8. (a) **Formulera multiplikationsprincipen.**

(b) Hur många heltal mellan 1000 och 9999 har alla siffror olika? Redogör hur Du resonerar.

(a) Se Vretblads bok eller stencilen "Kombinatorik".

(b) Den första siffran kan väljas på 9 olika sätt (bland $1, 2, \dots, 9$). Den andra kan också väljas på 9 olika sätt (bland $0, 1, 2, \dots, 9$ med den första valda siffran struken). Den tredje siffran kan väljas på 8 olika sätt (bland $0, 1, 2, \dots, 9$ med den första och den andra valda siffran struken). Slutligen kan den fjärde siffran väljas på 7 olika sätt. Enligt multiplikationsprincipen är antalet heltal mellan 1000 och 9999 med alla siffror olika $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.