LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN
I MAL 200 del 3 1998-04-20

Vi ger hänvisningar till kurslitteraturen när det gäller teorifrågor dvs definitioner, satser och deras bevis.

1. **(a) Vad menas med en uppräknelig mängd?**

   (b) Visa att de rationella talen bildar en uppräknelig mängd.

   Se stencilen "Ändligt och oändligt" för både definitionen av en uppräknelig mängd och ett bevis av att de rationella talen bildar en uppräknelig mängd.

2. **(a) Redogör för vad som menas med ett primtal och faktoruppdela talet 1998 i primfaktorer.**

   (b) Formulera aritmetikens fundamentalsats och förklara satsens innebörd med utgångspunkt från faktoruppdelningen av 1998.

   (c) Visa att det finns oändligt många primtal.

   (a) Definitionen av primtal finner man i stencilen "Delbarhet och primtal" (Definition (6.12)) eller i Vretblads bok på sid. 35. Vi har

$$\begin{array}{r|l} 1998 & 2 \\ 999 & 3 \\ 333 & 3 \\ 111 & 3 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

   dvs $1998 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$.

   (b) Se stencilen "Delbarhet och primtal" (sats (6.12)) eller Vretblads bok sid. 42 (Sats 3).

   (c) Euklides sats om att det finns oändligt många primtal bevisas i stencilen "Delbarhet och primtal" (Sats (6.15)) eller i Vretblads bok (Sats 4 sid. 43).

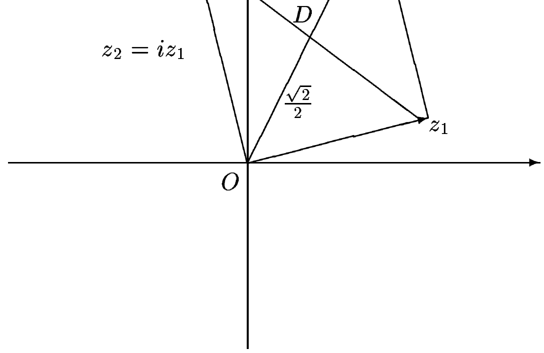
3. **Närmevärden till uttryck som $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$ kan vara svåra att bestämma med huvudräkning. Redogör för en metod att komma förbi denna svårighet och exemplifiera den genom att bestämma ett närmevärde till $\frac{1}{\sqrt{3}}$ om man vet att $\sqrt{3} \approx 1,73$.**

   Vi har

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx \frac{1,73-1}{2} = 0.365.$$

4. **Låt z_1 och z_2 vara komplexa tal sådana att $|z_1| = |z_2| = 1$ samt $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$. Tolka geometriskt talen z_1, z_2 och $z_1 + z_2$ med hänsyn till förutsättningarna ovan och visa att $z_1^2 + z_2^2 = 0$.**

   Som vanligt svarar talet $z_1 + z_2$ mot diagonalen i den parallellogram som spänns upp av vektorerna z_1 och z_2 (se figuren).



Eftersom $|z_1| = 1$ och $|z_2| = 1$ så har denna parallellogram lika långa sidor dvs den är en romb. Diagonalerna i en romb bildar en rätt vinkel (90°). Den ena diagonalen har längden $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$, vilket ger att vinkeln mellan vektorerna z_1 och z_2 är 90° dvs parallellogramen är en kvadrat. Detta kan man inse på flera olika sätt t ex genom att betrakta den rättvinkliga triangeln ODz_1 (se figuren – O betecknar origo, och D diagonalernas skärningspunkt). I denna triangel har hypotenusan Oz_1 längden 1, och kateten OD längden $\frac{\sqrt{2}}{2}$ så att vinkeln DOz_1 har 45°. Eftersom z_1 och z_2 bildar 90° och har samma belopp så är $z_2 = iz_1$ (se t ex övning E 5 i stencilen “Komplexa tal” om Du inte förstår varför). Alltså är

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 + (iz_1)^2 = z_1^2 - z_1^2 = 0.$$

Anmärkning. Det finns flera andra sätt att lösa denna uppgift.

5. **Bestäm en lösning till den diofantiska ekvationen $19x + 23y = 1$ med hjälp av två olika metoder. Redogör för dessa metoder och peka på fördelar och nackdelar.**

Enligt Euklides algoritm får man:

$$\begin{aligned} 23 &= 19 \cdot 1 + 4 \\ 19 &= 4 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1 \\ 3 &= 1 \cdot 3 \end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned} 1 &= \underline{4} - \underline{3} \cdot 1 = \underline{4} - (\underline{19} - \underline{4} \cdot 4) \cdot 1 = \\ &= \underline{4} \cdot 5 - \underline{19} = (\underline{23} - \underline{19} \cdot 1) \cdot 5 - \underline{19} = \\ &= \underline{23} \cdot 5 - \underline{19} \cdot 6 = \underline{19} \cdot (-6) + \underline{23} \cdot 5. \end{aligned}$$

Detta visar att $(x, y) = (-6, 5)$ är en lösning.

Den andra metoden går ut på att man betraktar funktionen $x = \frac{1-23y}{19}$ och räknar ut dess värden för olika heltaliga värden på y med förhoppning att man kommer på ett y som ger ett heltaligt x. Bland 19 efterföljande heltal y hittar man med all säkerhet ett sådant y. T ex kan man söka bland heltaliga y sådana att $-9 \leq y \leq 9$ (som vi vet duger $y = 5$). En motivering för detta förfarande kommer i avsnittet om restaritmetiker.

6. **I en talföljd $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ är $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ samt $a_{n+1} = 6a_{n-1} + a_n$ då $n \geq 2$.**

(a) Ange a_3, a_4, a_5, a_6.

(b) Ställ upp en förmodan om hur a_n kan uttryckas med hjälp av n och bevisa Din formel med hjälp av matematisk induktion.

(a) Vi har $a_3 = 6a_1 + a_2 = 6 \cdot 1 + 3 = 9 = 3^2$, $a_4 = 6a_2 + a_3 = 6 \cdot 3 + 9 = 27 = 3^3$, $a_5 = 6a_3 + a_4 = 6 \cdot 9 + 27 = 81 = 3^4$, $a_6 = 6a_4 + a_5 = 6 \cdot 27 + 81 = 243 = 3^5$.

induktion. För $n = 1$ är $a_1 = 1$ enligt förutsättningen och $a_1 = 3^{1-1} = 3^0 = 1$ enligt formeln. För $n = 2$ är $a_2 = 3$ enligt förutsättningen och $a_2 = 3^{2-1} = 3^1 = 3$ enligt formeln. Alltså gäller formeln för $n = 1$ och $n = 2$.

Vi förutsätter nu att formeln gäller då $n = k$ och $n = k+1$ dvs $a_k = 3^{k-1}$ och $a_{k+1} = 3^k$. Vi visar att formeln gäller då $n = k+2$. Enligt förutsättningen har vi:

$$a_{k+2} = 6a_k + a_{k+1} = 6 \cdot 3^{k-1} + 3^k = 2 \cdot 3 \cdot 3^{k-1} + 3^k = 2 \cdot 3^k + 3^k = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1},$$

vilket bevisar vårt påstående. Enligt induktionsprincipen gäller formeln för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

8. **(a) Formulera divisionsalgoritmen för polynom. Vad kan man säga om graden av resten vid division av ett polynom med ett andragradspolynom?**

(b) Beräkna rester av $X^{1998} - 2X + 2$ vid division med $X - 1$ och $X + 1$. Beräkna också resten vid division av detta polynom med $X^2 - 1$. (Du behöver inte utföra divisionsalgoritmen!)

(a) Formuleringen av divisionsalgoritmen för polynom hittar Du i Vretblads bok på sid. 133 eller i stencilen "Polynom och polynomekvationer", övning A. Resten vid division av ett polynom med ett polynom av grad 2 har grad högst lika med 1 eller är lika med 0, dvs resten kan skrivas på formen $aX + b$.

(b) Låt $f(X) = X^{1998} - 2X + 2$. Resten vid division av $f(X)$ med $X - 1$ är lika med $f(1) = 1^{1998} - 2 \cdot 1 + 2 = 1$, och resten vid division med $X + 1$ är lika med $f(-1) = (-1)^{1998} - 2 \cdot (-1) + 2 = 5$.

Vi har $f(X) = (X^2 - 1)q(X) + aX + b$. Vi sätter in $X = 1$ och $X = -1$ i den sista likheten. Då får vi: $f(1) = 1 = a \cdot 1 + b$ och $f(-1) = 5 = a \cdot (-1) + b$. Alltså är $a + b = 1$ och $-a + b = 5$. Genom att addera dessa ekvationer ledvis får vi $2b = 6$, så att $b = 3$. Alltså är $a = 1 - b = -2$. Svar: resten vid division av $f(X)$ med $X^2 - 1$ är $-2X + 3$.