LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN I MAL 200 del 3 1999-10-19

1. **Låt $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 < 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $C = \{x \in \mathbb{N} | x < 15$ och x är ett primtal$\}$. Bestäm $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$ och $(A \cup B) \cap C$. Är dessa mängder lika? Gäller Ditt påstående för helt godtyckliga mängder A, B, C? Motivera med hjälp av t ex Venn–diagram!**

   Vi har $A = \{0, \pm 1, \pm 2\}$ och $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Alltså är $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B \cap C = \{2, 3, 5\}$, så att $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = \{-2, -1, 0, 1, 4\}$ och $(A \cup B) \cap C = \{2, 3, 5\}$. Detta visar att mängderna inte är lika. Rent allmänt gäller inte detta påstående. I själva verket får man likheten då t ex $A = C$ och $B = \emptyset$ (man kontrollerar mycket lätt att likheten gäller).

2. **(a) Använd kvantorer och de logiska konnektiven för att formulera följande utsaga: Om $n \geq 1$ är ett naturligt tal så är både $6n - 1$ och $6n + 1$ primtal. Är denna utsaga sann? Motivera Ditt påstående.**

   (b) Formulera negationen till utsagan i (a) (så att negationssymbolen "$\neg$" inte förekommer i svaret). Vilken logisk sanning (tautologi) använder Du?

   (Du kan beteckna mängden av primtalen med t ex $\mathbb{P}$).

   (a) Vi kan komma överens att $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Då säger påståendet att $\forall n \in \mathbb{N} \ : 6n - 1 \in \mathbb{P} \wedge 6n + 1 \in \mathbb{P}$. Detta påstående är falskt. Om $n = 4$ får vi $6n + 1 = 25$, vilket inte är ett primtal.

   (b) Negationen av vårt påstående lyder: $\exists n \in \mathbb{N} \ : 6n - 1 \notin \mathbb{P} \vee 6n + 1 \notin \mathbb{P}$. Man använder sig av de Morgans lag: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

   Det fanns helt korrekta lösningar då man valde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ och skrev $\forall n \in \mathbb{N} \ : n \geq 1 \Rightarrow \ (6n - 1 \in \mathbb{P} \wedge 6n + 1 \in \mathbb{P})$. Då är negationen $\exists n \in \mathbb{N} : \ n \geq 1 \wedge (6n - 1 \notin \mathbb{P} \vee 6n + 1 \notin \mathbb{P})$.

3. **Ge exempel på två oändliga mängder A och B och tre funktioner $f : A \to B$, $g : A \to B$, $h : A \to B$ sådana att**

   (a) f är injektiv, men ej surjektiv,

   (b) g är surjektiv, men ej injektiv,

   (c) h är både injektiv och surjektiv dvs bijektiv.

   Välj $A = B = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

   (a) Definiera $f(n) = 2n$. Denna funktion är injektiv (ty $n_1 \neq n_2$ ger att $f(n_1) \neq f(n_2)$) och den är inte surjektiv (ty 1 är inte bilden – likheten $f(n) = 2n = 1$ är omöjlig).

   (b) Definiera $g(0) = 0$ och $g(n) = n - 1$ då $n > 0$. Denna funktion är inte injektiv (ty $g(0) = g(1) = 0$), men den är surjektiv (ty varje element i B är bilden av ett element i A).

   (c) Funktionen $h(n) = n$ (identiteten) är bijektiv dvs både injektiv och surjektiv.

4. **(a) Motivera att alla tal $5^k 7^l$, där k och l är naturliga tal, bildar en uppräknelig mängd.**

   (b) Bevisa att om A och B är två uppräkneliga mängder så är också mängden $A \cup B$ uppräknelig.

   (c) Använd (a) och (b) till att motivera att även alla tal $\pm 5^k 7^l$ bildar en uppräknelig mängd.

$$\begin{tikzcd}
5^1 7^1 \arrow[r] & 5^1 7^2 \arrow[dl] & 5^1 7^3 \arrow[r] & 5^1 7^4 \arrow[dl] & \cdots \\
5^2 7^1 \arrow[d] & 5^2 7^2 \arrow[ur] & 5^2 7^3 \arrow[dl] & 5^2 7^4 & \cdots \\
5^3 7^1 \arrow[ur] & 5^3 7^2 \arrow[dl] & 5^3 7^3 & 5^3 7^4 & \cdots \\
5^4 7^1 & 5^4 7^2 & 5^4 7^3 & 5^4 7^4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Man kan också hänvisa till en sats som säger att en oändlig delmängd till en uppräknelig mängd också är uppräknelig. Talen $5^k 7^l$ där $k, l = 1, 2, 3, ...$ bildar en oändlig delmängd till de naturliga talen som är uppräkneliga.

(b) Låt $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ och $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Unionen $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\}$ är också uppräknelig – man numrerar elementen i unionen så att a_1 får nummer 1, b_1 får nummer 2, a_2 får nummer 3, b_2 får nummer 4 osv. (innan numreringen sker kan man stryka de element i B som redan finns i A).

(c) Mängden av talen $\pm 5^k 7^l$ är unionen av mängderna av $5^k 7^l$ och $-5^k 7^l$ $(k, l = 1, 2, 3, \ldots)$. Alltså är den uppräknelig enligt (b).

5. **Bevisa att för varje $n = 1, 2, 3, ...$ är talet $T_n = 5^{2n} - 1$ delbart med 12.**

Vi kontrollerar att $T_1 = 5^2 - 1 = 24$ är delbart med 24. Nu antar vi att påståendet gäller för ett $k \geq 1$ dvs att 24 dividerar talet $T_k = 5^{2k} - 1$ och vi vill visa att påståendet gäller för nästa tal $n = k + 1$ dvs 24 dividerar $T_{k+1} = 5^{2(k+1)} - 1$. Vi har:

$$T_{k+1} = 5^{2(k+1)} - 1 = 5^{2k+2} - 1 = 25 \cdot 5^{2k} - 1 = 24 \cdot 5^{2k} + 5^{2k} - 1.$$

Denna likhet visar att talet T_{k+1} är summan av två termer $24 \cdot 5^{2k}$ och T_k som båda är delbara med 24. Alltså är talet T_{k+1} delbart med 24. Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$ dvs alla T_n är delbara med 24.

6. **(a) Låt a och b vara relativt prima naturliga tal (dvs SGD$(a, b) = 1$). Bestäm a och b då man vet att $ab = 225$.**

(b) Visa att om a och b är relativt prima naturliga tal vars produkt är en kvadrat av ett naturligt tal så måste både a och b vara kvadrater av naturliga tal.

Ledning till (b): Du kan använda aritmetikens fundamentalsats.

(a) Vi har $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Eftersom a och b saknar gemensamma primfaktorer måste $a = 1$, $b = 225$ eller $a = 9, b = 25$ eller $a = 25$, $b = 9$ eller $a = 225, b = 1$ (det finns alltså 4 möjligheter).

(b) Enligt aritmetikens fundamentalsats är ab en produkt av primfaktorer. Eftersom ab är en kvadrat så måste varje primfaktor ingå med jämn exponent. Men a och b saknar gemensamma primfaktorer så att a är en produkt av ett antal av primfaktorer p_i med jämna exponenter $2\alpha_i$ (dvs $a = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k}$) och b är en produkt av ett antal primfaktorer q_j med jämna exponenter $2\beta_j$ (dvs $b = q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \cdots q_l^{2\beta_l}$). Detta visar att både a och b är kvadrater av naturliga tal. Observera att man kan tillåta α_i eller β_j lika med 0.

alla heltal n. Bestäm SGD$(5n+2, 12n+5)$ då $n \in \mathbb{Z}$.

Ledning. Du kan börja med $n = 0$.

Om vi tar $n = 0$ får vi ekvationen $2x + 5y = 1$. Denna ekvation har en partikulär lösning $x_0 = 3, y_0 = -1$. Likheten $2x+5y = 2x_0+5y_0$ ger $2(x-x_0) = 5(y_0-y)$. Alltså är 5 en delare till $x - x_0$ så att $x - x_0 = 5k$ med ett heltal k. Detta ger $x = 3 + 5k$ och genom insättning i ekvationen $2(x-x_0) = 5(y_0-y)$ får vi $y_0-y = 2k$ dvs $y = -1-2k$. Vi vill hitta en lösning (x, y) som duger för alla n. Den givna ekvationen ger $(5n+2)(3+5k)+(12n+5)(-1-2k) = 1$. Tar vi här $n = 1$ så får vi $7(3+5k)+17(-1-2k) = 1$, vilket ger $k = -3$. Alltså får vi $x = 3+5\cdot(-3) = -12$ och $y = -1-2\cdot(-3) = 5$. Nu kontrollerar vi lätt att $(5n+2)(-12)+(12n+5)5 = 1$ för alla n. Om nu d är en gemensam delare till både $5n+2$ och $12n+5$ så måste d dela talet 1 eftersom $(5n+2)x + (12n+5)y = 1$. Alltså är $d = 1$ dvs SGD$(5n+2, 12n+5) = 1$.

8. **(a) Låt z_1 och z_2 vara två komplexa tal. Visa likheten $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.**

   (b) Låt z vara ett komplext tal. Visa att om $|z| = 1$ så gäller $|2z-1| = |z-2|$.

   Ledning. Kvadrera beloppen!

(a) Se kursboken.

(b) Enligt förutsättningen är $|z| = 1$, så att $z\bar{z} = 1$. Vi har $\mathrm{VL}^2 = |2z-1|^2 = (2z-1)\overline{(2z-1)} = (2z-1)(2\bar{z}-1) = 4z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 1 = 5 - 2z - 2\bar{z}$ och $\mathrm{HL}^2 = |z-2|^2 = (z-2)\overline{(z-2)} = (z-2)(\bar{z}-2) = z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 = 5 - 2z - 2\bar{z}$. Alltså är $\mathrm{VL}^2 = \mathrm{HL}^2$, så att $|2z-1| = |z-2|$.